



FAKULTETSOMRÅDET FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

AVHANDLING PRO GRADU

Symmetrier i tvådimensionella plan

Skribent:
Linnea Nordblom

Handledare:
Mikael Lindström

2021

Innehåll

Inledning	3
1 Definitioner och satser	4
2 En historisk och visuell presentation av symmetrigrupperna	9
2.1 Symmetrigruppernas historia	9
2.2 En visuell introduktion av symmetrigrupperna	13
2.2.1 Reflektion	14
2.2.2 Rotation	16
2.2.3 Translation	17
2.2.4 Glidreflektion	18
2.3 Magiteoremet	18
2.4 Mönster i andra plan	21
2.4.1 Sfäriska mönster	21
2.4.2 Friezemönster	23
2.4.3 Hyperboliska mönster	25
3 Symmetriernas bakomliggande teori	26
3.1 Isometrier	26

3.2	Den Euklidiska gruppen	28
3.2.1	Direkta och motsatta isometrier	35
3.2.2	Gitter och punktgrupper	36
4	De 17 symmetrigrupperna	41
4.0.1	Vi söker symmetrigrupperna	41
4.0.2	Vi visar att grupperna inte är isomorfa	47

Inledning

Mönster och symmetrier är koncept som fascinerat människan i årtusenden. Man kan bland annat finna mönster på lerkrus från stenåldern, som dekor i forntida moskéer samt i moderna målningar och tryck. I vardagen kan vi se mönster i allt från tygpåsar och webbsidor till arkitektur och tatueringar. Det är uppenbart att vi tycker om att skapa och omge oss med olika mönster.

Även om skapandet av mönster är en kreativ process så är den också i hög grad systematisk. De flesta kan identifiera och skapa några mönster, men då mönstren blir mera komplicerade kan det vara svårt att förstå hur de fungerar. Efter framsteg inom det abstrakta området gruppteori kunde matematiker börja beskriva mönster och generera dem med formler. Detta har gjort att vi har fått mera förståelse för dem och lättare kan skapa dem.

I denna avhandling behandlas, utgående från grunderna i gruppteori, teorin bakom mönster som upprepas i ett oändligt plan. Sagda teori används sedan för att visa att det endast finns 17 olika typer av tvådimensionella mönster.

Kapitel 1

Definitioner och satser

I detta kapitel presenteras några rudimentära definitioner och satser som är nödvändiga för resten av avhandlingen.

Definition 1.0.1. Låt X och Y vara vektorrum över \mathbb{R} . En avbildning $F : X \rightarrow Y$ är **linjär** om $F(\alpha v + u) = \alpha F(v) + F(u)$ för alla $\alpha \in \mathbb{R}$ och alla $u, v \in X$.

Anta att $F : X \rightarrow Y$ är en linjär avbildning och låt $N(F)$, $V(F)$, $D(F)$ beteckna nollrummet $\{x \in X : F(x) = 0\}$, värdemängden $\{F(x) \in Y : x \in X\}$ respektive definitionsmängden för F . I allmänhet antas att $D(F) = X$.

Sats 1.0.1. Dimensionsatsen:

Om X och Y är två vektorrum, X är ändligt dimensionellt och $F : X \rightarrow Y$ är en linjär avbildning, gäller:

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim X.$$

Denna sats kan bevisas på följande sätt. Anta att X är ett ändligt dimensionellt vektorrum och att F är en linjär avbildning från X till vektorrummet Y . Låt (u_1, \dots, u_m) vara en bas till $N(F)$ så att $\dim N(F) = m$. De linjärt oberoende vektorerna (u_1, \dots, u_m) kan utvidgas till en bas $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ tillhörande X . Därmed är $\dim X = m + n = \dim N(F) + \dim(w_1, \dots, w_n)$. För att bevisa satsen behöver vi endast visa att $\dim V(F) = n$ vilket vi kan göra genom att visa att (Fw_1, \dots, Fw_n) är en bas till $V(F)$.

Låt $x \in X$. Eftersom $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ spänner upp X kan vi skriva

$$x = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n,$$

där a_i och b_i tillhör \mathbb{R} . Eftersom F är linjär fås

$$Fx = b_1 Fw_1 + \dots + b_n Fw_n,$$

där termerna av formen Fu_j försvinner eftersom alla $u_j \in N(F)$. Den senare ekvationen ger att (Fw_1, \dots, Fw_n) spänner upp $V(F)$.

För att visa att (Fw_1, \dots, Fw_n) är linjärt oberoende antar vi att $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ och att $c_1Fw_1 + \dots + c_nFw_n = 0$. Då är $F(c_1w_1 + \dots + c_nw_n) = 0$, och därmed gäller $c_1w_1 + \dots + c_nw_n \in N(F)$. Eftersom (u_1, \dots, u_m) spänner upp $N(F)$ gäller

$$c_1w_1 + \dots + c_nw_n = d_1u_1 + \dots + d_mu_m,$$

där $d_i \in \mathbb{R}$. Denna ekvation ger att alla $c_i = 0$ (och $d_i = 0$) eftersom $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$ är linjärt oberoende. Därmed är (Fw_1, \dots, Fw_n) linjärt oberoende och följaktligen en bas till $V(F)$, vilket bevisar vår sats.

Definition 1.0.2. En **algebraisk struktur** är en mängd A försedd med en eller flera operationer. En mängd A med operationen $*$ bildar en struktur som betecknas $\langle A, * \rangle$. Strukturen $\langle A, * \rangle$ är entydigt bestämd av mängden A och för varje $a, b \in A$ gäller att $a * b \in A$.

En **grupp**, $\langle G, * \rangle$ är en algebraisk struktur som uppfyller villkoren:

- i) $a * (b * c) = (a * b) * c$ för alla $a, b, c \in G$.
- ii) Det finns ett neutralt element $e \in G$ sådant att $e * a = a * e = a$ för alla $a \in G$.
- iii) För varje $a \in G$ finns ett element $a^{-1} \in G$ sådant att $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Om det för mängderna H och G gäller att $H \subseteq G$ och $\langle G, * \rangle$ och $\langle H, * \rangle$ båda är grupper sägs $\langle H, * \rangle$ vara en **delgrupp** av $\langle G, * \rangle$.

Exempel 1.0.1. Vi visar att $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ är en grupp. För varje $a, b, c \in \mathbb{R}$ gäller $a + (b + c) = (a + b) + c$. Vi har ett neutralt element $e = 0$ sådant att $0 + a = a + 0 = a$, för varje $a \in \mathbb{R}$. För varje $a \in \mathbb{R}$ finns en invers $a^{-1} = -a$ sådan att $a + (-a) = (-a) + a = 0$ och $-a \in \mathbb{R}$.

Vi undersöker nu om \mathbb{R} försedd med multiplikation är en grupp. För varje $a, b, c \in \mathbb{R}$ gäller $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Vi har ett neutralt element $e = 1$ sådant att $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, för varje $a \in \mathbb{R}$. Det finns dock ingen invers för elementet $0 \in \mathbb{R}$ eftersom för varje $a \in \mathbb{R}$ gäller $0 \cdot a = 0 \neq 1$. Därmed kan vi se att mängden \mathbb{R} försedd med multiplikation inte är en grupp.

Lemma 1.0.1. Givet en grupp $\langle G, * \rangle$ och $H \subseteq G$. Då är $\langle H, * \rangle$ en delgrupp till $\langle G, * \rangle$ om och endast om

- i) $H \neq \emptyset$ och
- ii) $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$, där b^{-1} är inversen till b i G .

Detta kan bevisas med lätthet. Först visas att antagandet leder till villkoren, sedan tvärtom.

Antag att $\langle H, * \rangle$ är en delgrupp till $\langle G, * \rangle$. Då har $\langle H, * \rangle$ ett neutralt element e vilket innebär att $H \neq \emptyset$. Varje element i H har en invers som också tillhör H . Låt nu a, b vara två godtyckliga element i H . Eftersom H är en grupp gäller $b^{-1} \in H$. Följaktligen gäller för varje $a * b^{-1} \in H$ eftersom H är sluten under $*$.

Antag nu att $H \neq \emptyset$ och att för godtyckliga element a, b i H gäller $a * b^{-1} \in H$, då $b^{-1} \in G$. Från antagandet fås att ett element x kan multipliceras i H med sin egen invers i G och då fås ett element i H . Detta innebär att $x * x^{-1} = e$ tillhör H , det vill säga $\langle H, * \rangle$ har ett neutralt element. Eftersom $e, x \in H$ ger antagandet att $e * x^{-1} = x^{-1}$ också tillhör H . Därmed har varje element i H en invers i H . Vidare gäller även att $a * (b^{-1})^{-1} = a * b$ tillhör H , varför $\langle H, * \rangle$ är sluten under $*$. Eftersom G är en grupp och varje x^{-1} i H tillhör G måste varje $x \in H$ också tillhöra G . Därmed vet vi att H är en delmängd av G och då $*$ är associativ i G är den även det i $\langle H, * \rangle$.

Vi har nu utgående från villkoren visat att $\langle H, * \rangle$ uppfyller kraven för en grupp och eftersom H en delmängd av G gäller att $\langle H, * \rangle$ är en delgrupp till $\langle G, * \rangle$.

Lemma 1.0.2. Givet en grupp $\langle G, * \rangle$ med två delgrupper $\langle H, * \rangle$ och $\langle J, * \rangle$ bildar även snittet $H \cap J$ en delgrupp $\langle H \cap J, * \rangle$ till $\langle G, * \rangle$.

Eftersom H och J är delgrupper av $\langle G, * \rangle$ uppfylls villkoren i föregående Lemma för vardera grupp. Med andra ord gäller att H och J är icke-tomma med åtminstone det neutrala elementet gemensamt så $H \cap J$ är också icke-tom. Antag nu att $x, y \in H \cap J$, varför x och y måste ligga i H och J . Det andra villkoret innebär att produkten $x * y^{-1}$ tillhör både H och J och då måste den även tillhöra snittet. Således kan vi konstatera att $\langle H \cap J, * \rangle$ är en undergrupp till $\langle G, * \rangle$.

Definition 1.0.3. Anta att $\langle H, * \rangle$ är en delgrupp till $\langle G, * \rangle$. Då är för varje $a \in G$ vänstersidoklassen $a * H$ och högersidoklassen $H * a$ definierade enligt:

$$a * H = aH = \{a * h : h \in H\} \quad \text{och} \quad H * a = HA = \{h * a : h \in H\}.$$

Om $aH = Ha$ för alla $a \in G$ sägs H vara en **normal delgrupp**. Man kan visa att detta är ekvivalent med att för varje $h \in H$ och $g \in G$ gäller att $g * h * g^{-1} = ghg^{-1} \in H$. Om H är en normal delgrupp till G kan man bilda **kvotgruppen** $G/H = \{aH : a \in G\}$, eftersom produkten av sidoklassen kan definieras enligt $(aH) * (bH) = abH$.

Antag att $f : X \rightarrow Y$ är en funktion. Då är f en **bijektion** om f är injektiv och surjektiv. Med andra ord om det för varje $y \in V(F)$ finns högst ett $x \in D(F) = X$ med $F(x) = y$ samt $V(F) = Y$.

Sats 1.0.2. Mängden av alla sidoklasser av $\langle G, * \rangle$ bildar en partition av gruppen, det vill säga $G = \bigcup_{a \in G} a * H$, $a \in G$ och sidoklasserna är disjunkta.

Bevis. Det är klart att $\bigcup_{a \in G} a * H \subseteq G$. Ta ett godtyckligt $a \in G$. För $e \in H$ gäller $a = a * e$, vilket medför att $a \in a * H$. Alltså fås att $G \subseteq \bigcup_{a \in G} a * H$.

Att sidoklasserna aH och bH är disjunkta innebär att om $aH \cap bH \neq \emptyset$ så gäller $aH = bH$.

Antag nu att $aH \cap bH \neq \emptyset$. Då finns det två element x, y tillhörande H sådana att $ax = by$. Då är $a = byx^{-1}$ och för varje element $h \in H$ är $ah = byx^{-1}h$ ett element

i bH , varför $aH \subseteq bH$. Vidare gäller att $b = axy^{-1}$ så att det för varje $h \in H$ gäller att $bh = axy^{-1}h$ är ett element i aH , varför $bH \subseteq aH$. Därmed medför antagandet att $aH = bH$. \square

En grupp $\langle G, * \rangle$ kallas **cyklisk** om det finns ett element $a \in G$ så att $G = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exempel 1.0.2. Den cykliska gruppen $\langle Z_8, +_8 \rangle$ är en grupp med mängden $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ försedd med addition modulo 8. Denna grupp har en delgrupp $\langle H, +_8 \rangle$ där $H = \{0, 4\}$. Vi får då fyra vänstersidoklasser:

$$\begin{aligned} H &= \{0, 4\} \\ 1 +_8 H &= \{1, 5\} \\ 2 +_8 H &= \{2, 6\} \\ 3 +_8 H &= \{3, 7\} \\ 4 +_8 H &= \{4, 0\} = H \\ 5 +_8 H &= \{5, 1\} = 1 +_8 H \\ 6 +_8 H &= \{6, 2\} = 2 +_8 H \\ 7 +_8 H &= \{7, 3\} = 3 +_8 H. \end{aligned}$$

Definition 1.0.4. Anta att $\langle G, * \rangle$ och $\langle H, \circ \rangle$ är algebraiska strukturer och att det finns en funktion $f : G \rightarrow H$. Då sägs f vara en **homomorfism** om $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ gäller för alla $a, b \in G$.

Anta vidare att $\langle G, * \rangle$ och $\langle H, \circ \rangle$ är grupper och att det finns en bijektion $\varphi : G \rightarrow H$. Då sägs φ vara en **isomorfism** om $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ gäller för alla $a, b \in G$. Vidare sägs $\langle G, * \rangle$ och $\langle H, \circ \rangle$ vara **isomorfa**, vilket betecknas $\langle G, * \rangle \cong \langle H, \circ \rangle$.

Sats 1.0.3. Första isomorfitheoremet

Låt $\langle G, * \rangle$ och $\langle H, * \rangle$ vara två grupper och låt $\varphi : G \rightarrow H$ vara en homomorfism med nollrummet $N(\varphi)$. Då gäller att bilden $V(\varphi)$ av φ är isomorf med $G/N(\varphi)$.

Bevis. Låt N beteckna nollrummet $N(\varphi)$. Definiera funktionen $\theta : G/N \rightarrow V(\varphi) \subseteq H$ genom $\theta(xN) = \varphi(x)$, för varje $x \in G$. Vi skall visa att θ är en isomorfism.

Funktionen θ är väldefinierad eftersom

$$xN = yN \iff x^{-1}y \in N \iff \varphi(x^{-1}y) = e_H,$$

där e_H är det neutrala elementet i H , vilket är ekvivalent med att $\varphi(x)^{-1}\varphi(y) = e_H$ eller $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Att θ är en homomorfism följer ur dess definition, emedan för varje $x, y \in G$ gäller att

$$\theta(xNyN) = \theta(xyN) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \theta(xN)\theta(yN).$$

För att visa att θ är injektiv, låt $\varphi(x) = \varphi(y)$. Härur följer att $\varphi(y)^{-1}\varphi(x) = e_H \Rightarrow \varphi(y^{-1}x) = e_H$, det vill säga $y^{-1}x \in N$ eller $xN = yN$.

Därmed är θ injektiv och surjektiv enligt dess definition.

□

Kapitel 2

En historisk och visuell presentation av symmetrigrupperna

2.1 Symmetrigruppernas historia

Geometri har genom historien varit ett viktigt forskningsområde. När gruppteorin utvecklades under 1800-talet kunde matematiker tillämpa denna abstrakta teori i forskning kring geometriska former. Även om teorin bakom mönster inte har behövts för de otaliga konstnärer som återgett dem tidigare kan den hjälpa oss att förstå dem på ett helt annat plan. Därmed började man att söka efter olika sätt att klassificera mönster. Genom gruppteorin går det att visa att alla mönster vi kan skapa faller inom endast 17 typer, vilka är kända som de 17 symmetrigrupperna eller tapetgrupperna (*eng. the 17 symmetry groups resp. wallpaper groups*).

Hur länge människan har känt till dessa grupper är oklart, då man kan lista ut dem utan matematiskt bevis. De äldsta kända källorna visar att man fann de 17 grupperna genom att söka sig fram till dem. På senare tid har man teoretiskt kunnat bevisa antalet till en början med hjälp av gruppteori, men senare även med andra metoder.

Eftersom mönster återgetts rikligt inom många antika kulturer har matematiker spekulerat länge i huruvida de redan under denna tid visste om att det fanns 17 typer av mönster. Detta har lett till ett flertal undersökningar där de har räknat antalet typer av symmetrigrupper bland mönster knutna till olika kulturer och tidsepoker. Denna diskussion har även lett till att palatset Alhambra har blivit välbesökt av forskare och ännu idag tas dess mosaiker upp som exempel i publikationer. Konstnären M.C. Escher var intresserad av symmetrigruppernas klassificering ur ett estetiskt perspektiv och kom att bli ett så stort namn inom området att man sällan kan läsa om symmetrigrupper utan att se något av hans verk. För att sätta symmetrigrupperna i ett historiskt perspektiv är det således motiverat att gå in på historien bakom dessa två fenomen.

Alhambra

I dalarna i den spanska provinsen Granada ligger det magnifika palatset och fortet Alhambra. Komplexet har en rik historia och stor variation på estetik då det fått många tillbyggnader och renoveringar under loppet av 100 år under influens från två olika kulturer. Den äldsta delen av Alhambra var ett fort som tros vara byggt på 800-talet av antingen araber eller muslimer. Fortet stod till stor del orört och sedan länge övergivet när kung Muhammed ben Al-Hamar, den första i Nasrid-dynastin, valde platsen till sin kungliga bostad på 1200-talet. Han och hans ättlingar gjorde flera tillbyggnader och förstärkte försvaret i den gamla delen av fortet. Den största delen av palatset som finns kvar än idag tillkom under regenterna Yusuf (1333-53) och Mohammed V (1353-91). Till dessa tillbyggnader hör Lejongården (*Patio de los Leones*) och Rättvisans port (*Puerta de la Justicia*) som i dagsläget tillhör de mest välkända inslagen i palatset.

På 1400-talet när katolikerna drev ut muslimerna ur Spanien blev Alhambra deras sista fäste. År 1492 tvingades de till slut att överge fortet, men till skillnad från många andra muslimska byggnader i Spanien som förstördes förblev Alhambra mestadels intakt. Det nygifta kungaparet Ferdinand II och Isabella I valde palatset och fortet som säte för sitt kungliga hov. Ferdinand ville omvandla Alhambra till ett renässanspalats så många byggnader renoverades. Den senare monarken Karl V gav order om att riva en del av komplexet för att ge plats åt ett ännu mera storslaget palats med fokus på dåtida modern komfort, men på grund av Moriscorevolten 1568-1571 blev detta aldrig färdigt. Revolten resulterade i att Alhambra igen övergavs och under 1600- och 1700-talet tog palatset mycket skada från vistelsen av hemlösa.

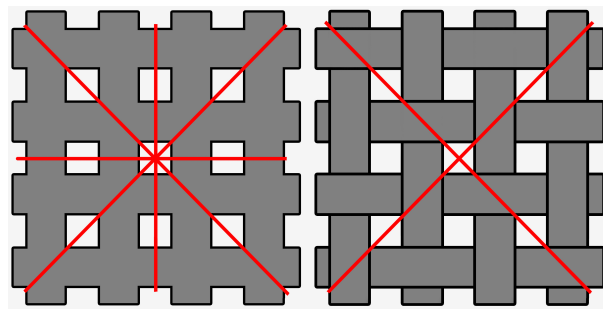
År 1808-1812 ockuperades Alhambra av Napoleons trupper som ytterligare förstörde det redan vanskötta palatset. Först efter Napoleons fall återupptäcktes skönheten i komplexet och 1870 utsågs Alhambra till ett nationellt monument och restaurering påbörjades.

Användningen av mönster inom religion och kultur är vanligt, men i den muslimska kulturen är användandet så rikligt att geometriska mönster numera är starkast förknippade med islamska mönster. Att det är förbjudet inom islam att avbilda heliga figurer kanske är en bidragande orsak till det överflöd samt den mångfald av mönster som pryder deras byggnader. Det är just denna variation som har väckt nyfikenhet hos många matematiker. Det är nämligen mest om islamska mönster det diskuterats huruvida det går att finna alla 17 symmetrigrupper. I och med detta har Alhambra fått en stor relevans inom den gruppteoretiska forskningen.

Alhambras utsmyckningar har sedan slutet 1800-talet varit föremål för intensiv diskussion. Ett flertal av de tidiga publikationerna påstår att alla grupper går att finna bland dem. Exempelvis har George E. Martin (1982) och Hermann Weyl (1952) påstått detta, dock utan att dokumentera vilka mönster som tillsammans representerar alla grupper. Flera senare publikationer menar däremot att några av dem saknas. Efter en grundligare undersökning 1986 rapporterade Grünbaum, Grünbaum och Shepherd att fyra grupper saknas inte bara i Alhambra utan i moriska artefakter överlag.

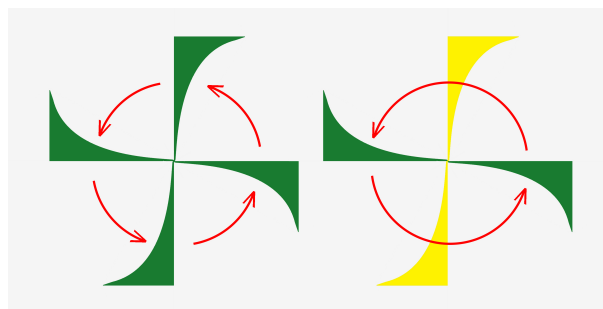
Att det finns varierande åsikter kring antalet symmetrier i Alhambra är förståeligt. När det kommer till att klassificera ett dekorativt mönster kan det nämligen uppstå en rad problem. För det första kan ett mönster inte beaktas om det innehåller skrift. Många mönster har nämligen arabisk text på sig. En del av mönstren täcker mycket små områden, vilket resulterar i att det kan vara svårt att se hur det upprepar sig på ett oändligt plan. Det finns också utmaningar i att identifiera islamska mönster i Alhambra eftersom det har gjorts så mycket förändringar även under katolska influenser. Det kan därför vara svårt att veta om ett mönster verkligen tillhör den kultur som undersöks.

Slutligen återstår två tolkningsfrågor: bör färgsättning av mönster samt överlappning av linjer beaktas? Vikten av dessa frågor kan belysas med två exempel. Om ett rutmönster jämförs med ett likadant mönster med överlappningar, se figur 2.1, kan ses att det finns färre symmetriaxlar i den senare. Detta kan göra att vi får två helt olika symmetrigrupper.



Figur 2.1

Figur 2.2 visar ett mönster bestående av fyra gröna trianglar. Denna figur förblir oförändrad vid rotation om 90, 180 och 270 grader. Om två av dessa trianglar färgas gula förblir figuren oförändrad enbart vid 180 graders rotation vilket gör att dessa figurer har olika symmetrier.



Figur 2.2

Då det kommer till matematiska framsteg kan det anses trivialt hur många mönster som finns i äldre kulturer, men då det kommer till praktiska applikationer av grupp teorin kan det vara nyttigt att se att det inte alltid är så enkelt som teorin framställer det.

M. C. Escher

Den holländska grafikern och konstnären Maurits Cornelis Escher (1898-1972) är berömd för sina verk inspirerade av matematisk gruppteori. Under en resa till Spanien år 1922 besökte Escher Alhambra och blev mycket inspirerad av de dekorativa mönstren. Han började experimentera med att återskapa mönstren i andra former men blev inte nöjd med resultaten. Sommaren 1936 återvände han till Alhambra och spenderade hela dagarna med att rita skisser som denna gång kom att lägga grunden för hans framtida verk. Eschers motiv avvek från de strikt geometriska islamska mönstren då han experimenterade med bland annat djurmotiv. Då Eschers bror, som var professor i geologi vid Leidens Universitet, såg Eschers senaste alster förknippade han broderns träsnitt med kristallografi, vilket är en vetenskap som är väldigt nära gruppteori. Han skickade Escher en förteckning med artiklar inom området, däribland Pólyas artikel om symmetrigrupper från 1924. Även om han inte förstod den bakomliggande gruppteorin kunde Escher lära sig hur de 17 symmetrigrupperna fungerade.

Under de följande fyra åren producerade Escher ett fyrtiotal färgglada illustrationer som uppvisade en stor variation av symmetrigrupper. Produktiviteten avtog i samband med början av andra världskriget, men efter krigsslutet kom han att spendera mycket tid på att arbeta fram nya koncept för symmetriska konstverk.

Escher fyllde ett flertal anteckningsböcker med studier kring symmetrier som utfördes på ett mycket matematiskt sätt; systematiskt och med notationer som han själv uppfunnit. Dessa innehöll även omfattande resultat från undersökningar om flerfärgade mönster. Även om böckerna endast var menade som hjälpmedel för Eschers konstnärliga kreativitet framkommer det tydligt i dem att han gjort efterforskningar inom områden rörande kristallografi på hög nivå, detta långt innan matematiska forskare etablerat området. Efter publiceringar av anteckningarna blev Escher en efterfrågad föreläsare världen över.

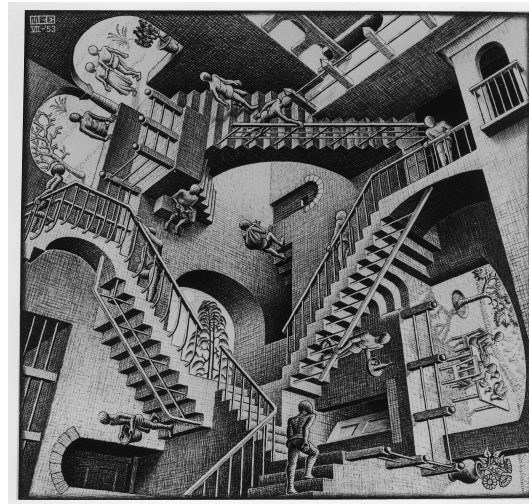


Figur 2.3: Ett av Eschers flerfärgade mönster som föreställer en ryttare på en häst.

År 1954 blev Escher bekant med geometrikern Coxeter och genom regelbunden brev-
växling senare vänner. Genom en av Coxeters artiklar lärde sig Escher reglerna kring
hyperboliska mosaiker från diagram. År 1995, långt efter Eschers död 1972, påvisar
Coxeter att Escher ådstakommit matematisk perfektion på millimetern i sin etsning Cir-
cle Limit 3. Eschers fascination höll sig inte till två dimensioner utan han hade även
ett stort intresse för topologi, det vill säga objekt vars form inte beror på avstånd, vil-
ket inspirerade hans många omöjliga skapelser. Däribland hör exempelvis den berömda
litografen Relativitet.



(a) Änglar och demoner är ett av Eschers hyper-
boliska mönster.



(b) Relativitet av M.C. Escher.

M. C. Eschers historia belyser faktumet att man kan lära sig hur alla mönstertyperna
fungerar utan den matematiska teorin, men med hjälp av gruppteori kunde Escher lättare
förstå dem, till och med utan att han förstod all matematik, och fann inspiration till ännu
mera nyskapande mönster och former.

2.2 En visuell introduktion av symmetrigrupperna

Följande avsnitt ägnas åt introduktion till symmetrier på ett mera visuellt sätt. Det är
i stort inspirerat av en ännu noggrannare genomgång av grunderna i boken *The sym-
metries of things* [3]. Notationen som genom avhandlingen används för att beskriva
symmetrier förklaras här med tillhörande exempel. Samtidigt kommer exempel ges för
alla 17 symmetrigrupper som finns i ett tvådimensionellt plan med tillhörande notation.

Den notation som kommer att användas kallas orbifold notation (*eng. orbifold nota-
tion/orbifold signature*) som har blivit populäriserad av John Conway. Detta val har
gjorts eftersom notationen på senare tid tagits mer i användning och är tydligare än den
tidigare internationella notationen (i många texter förväxlar skribenter de två notationer-
na $p3m1$ och $p31m$). En tabell över olika notationer och vad de motsvarar i förhållande
till varandra kan ses i tabellen nedan.

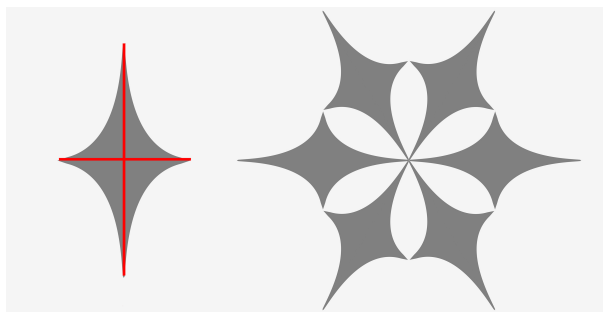
OS	I (C&M)	S (N)	P G	F C
*632	p6m	$C_{6v}^{(I)}$	D_6	W_6^1
632	p6	$C_6^{(I)}$	C_6	W_6
442	p4m	$C_4^{(I)}$	D_4^	W_4^1
4*2	p4g	C_{4v}^{II}	D_4^o	W_4^2
442	p4	$C_4^{(I)}$	C_4	W_6
333	(p3m1)	(C_{3v}^{II})	D_3^	W_3^1
3*3	(p31m)	(C_{3v}^I)	D_3^o	W_3^2
333	p3	$C_3^{(I)}$	C_3	W_3
*2222	pmm	C_{2v}^I	D_2kkkk	W_2^2
2*22	cmm	C_{2v}^{IV}	D_2kgkg	W_2^1
22*	pmg	C_{2v}^{III}	D_2kkgg	W_2^3
22x	pgg	C_{2v}^{II}	D_2gggg	W_2^4
2222	p2	$C_2^{(I)}$	C_2	W_2
**	pm	C_s^I	D_1kk	W_1^2
*x	cm	C_s^{III}	D_1kg	W_1^1
xx	pg	C_2^{II}	D_1gg	W_1^3
o	p1	$C_1^{(I)}$	C_1	W_1

Figur 2.5

2.2.1 Reflektion

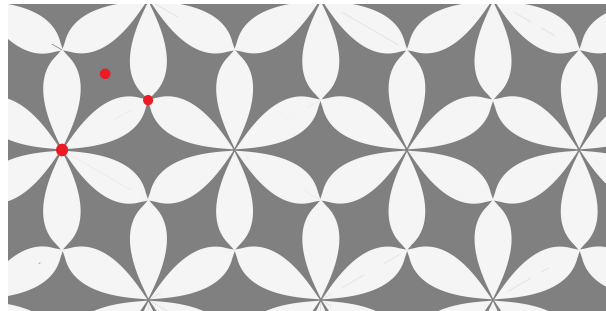
När ordet symmetri nämns kanske det första vi tänker på är spegelbilder. Den första signaturen kan förknippas till dessa; det är **reflektionssymmetri**, även kallad **kaleidoskopisk symmetri** (*eng. reflection/caleidoscopic symmetry*).

En figur har reflektionssymmetri om den förblir oförändrad vid spegling över någon symmetriaxel. Conway betecknar en ensam symmetriaxel som *. Om det finns flera symmetriaxlar i ett mönster kallas deras skärningspunkter för **kaleidoskopiska punkter**. Då det finns endast en kaleidoskopisk punkt har vi **punktsymmetri**. Dessa kallas även för rosettmönster (*eng. rosette patterns*). Ett exempel på en sådan signatur är *2●, vilket utläses ”stjärna två punkt symmetri” (*eng. star two point symmetry*) eller mera formellt ”period två kaleidoskopisk symmetri fixerad till en punkt” (*eng. period two caleidoscopic symmetry fixing a point*). Notationen *2 berättar för oss att vi har reflektionssymmetri med två symmetriaxlar och ● att det är en punktsymmetri.



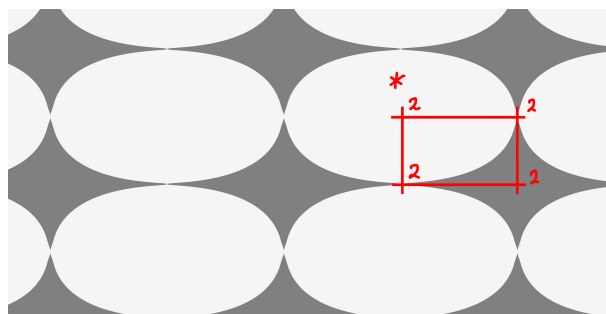
Figur 2.6: Den vänstra figuren har signaturen *2●. Den högra har signaturen *12●.

Då det finns flera kaleidoskopiska punkter har vi ett mönster som breder ut sig över ett oändligt plan. Exempelvis kan vi ha ett mönster med de olika kaleidoskopiska punkter av ordning 6, 3 och 2 som upprepas oändligt. I figur 2.7 ser vi en av vardera typ av de olika kaleidoskopiska punkterna markerade. Detta fall noteras som *632 och är vårt första exempel på en av de 17 tapets- eller symmetrigrupperna.



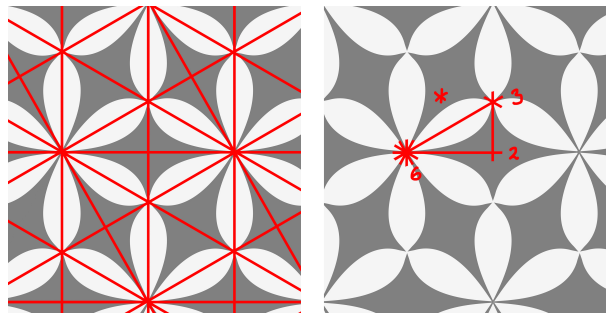
Figur 2.7: *632

Det kan också hända att vi har fyra kaleidoskopiska punkter av ordning 2 som alla är olika trots att de har lika många korsande symmetriaxlar. Det går att i se figur 2.8 att det finns fyra olika punkter vars omgivning inte går att ersättas med någon av de andra punkter. I detta exempel är symmetriaxlarna utritade så de kaleidoskopiska punkterna är i hörnen på en rektangel. Stjärnan indikerar att linjerna motsvarar symmetriaxlar för reflektion. Detta mönster noteras som *2222.



Figur 2.8: *2222

Att hitta signaturen till punktsymmetrier är inte så svårt. I figur 2.6 kan man räkna de 12 olika symmetriaxlarna genom att räkna ihop spetsarna på de 6 gråa stjärnorna och spetsarna på de 6 vita blombladen. Då man betraktar oändliga mönster blir det mindre intuitivt. Betrakta nu blommönstret i figur 2.7 ovan. Börja med att rita ut alla symmetriaxlar som går att finna. Någoting som är intressant är att vi då kan utröna den triangelformade figur som hela mönstret är uppbyggd av. I hörnen på denna triangel kan vi se tre olika kaleidoskopiska punkter. Alla andra är en upprepning av dessa så vi räknar hur många symmetriaxlar som möts i vardera punkt och kan konstatera att signaturen är *632.



Figur 2.9: Vi kan hitta tre olika kaleidoskopiska punkter.

Siffrorna i en signatur kan skrivas i vilken ordning som helst, därav är $*263$ samma sak som $*632$, men för enkelhets skull skrivs de som standard i fallande ordning. Det finns totalt sex olika symmetrier med enbart reflektioner. Dessa är $*$, $*2222$, $*333$, $*442$ och $*632$.

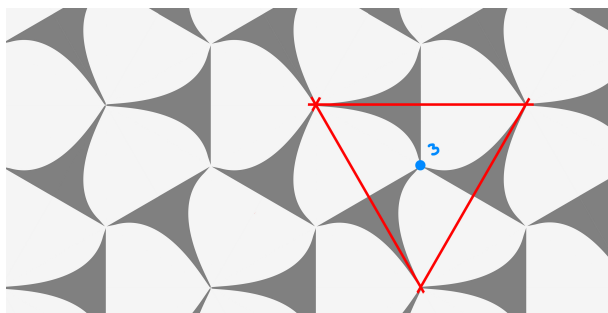
2.2.2 Rotation

En figur har **rotationssymmetri** (eng. *rotational symmetry*) om den förblir oförändrad vid rotation kring en rotationspunkt. Ordningen n på ett rotationscentrum är antal gånger man måste rotera tills vi återvänder till där vi började. Rotationer betecknas endast med siffrorna vars rotation återfinns i mönstret. Om de är i en signatur i kombination med någon annan symmetri skrivs de till vänster.



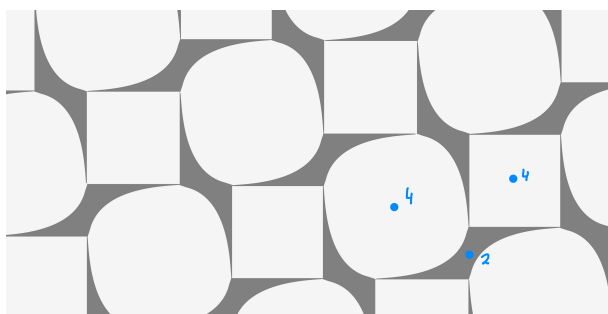
Figur 2.10: Denna figur har symmetrin $4\bullet$.

Betrakta mönstret i figur 2.11 och rita återigen ut alla symmetriaxlar. Vi finner att mönstret har signaturen $*3$, men till skillnad från tidigare har vi fortfarande en figur som repeteras innanför gränserna mellan symmetriaxlarna. Om man ser närmre på ett av dessa områden kan man finna att det går att rotera denna figur 120 grader utan att förändra mönstret. Detta är en trefaldig rotationssymmetri kring en rotationspunkt. Detta mönster har signaturen $3 * 3$.



Figur 2.11: 3*3

I nästa figur visas ett mönster som har två olika fyrfaldiga rotationscentrum och ett tvåfaldigt och har därmed signaturen 442.

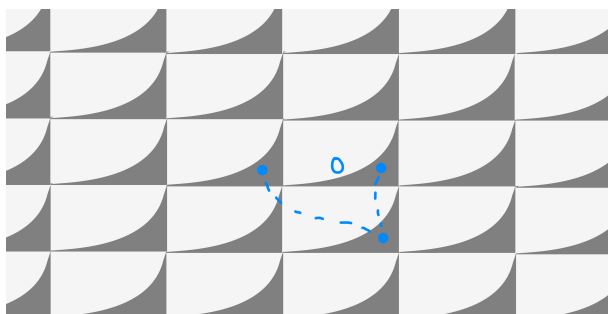


Figur 2.12: 442

2.2.3 Translation

Ett mönster har **translationssymmetri** (eng. *translation symmetry*) om den har figurer som är förskjutna längs med en vektor. Notationen för en sådan symmetri är \circ . Denna går inte att kombinera med någon annan symmetri så det finns bara en tvådimensionell mönstertyp med denna symmetri.

Igen har vi ett mönster uppbyggt av samma figur. Denna gång är den inte speglad eller roterad, bara upprepad i en så kallad vandring. Vi behöver veta tre figurers positionering sinsemellan för att bygga upp mönstret, därav noteras denna symmetri i figur 2.13 som två stigar.



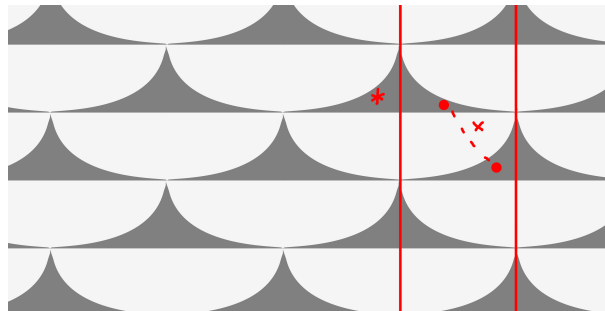
Figur 2.13: \circ

Notera hur alla exempel hittills har använt samma grundform, likformig triangel med en böjd sida, men de resulterade mönstren har sett mycket olika ut.

2.2.4 Glidreflektion

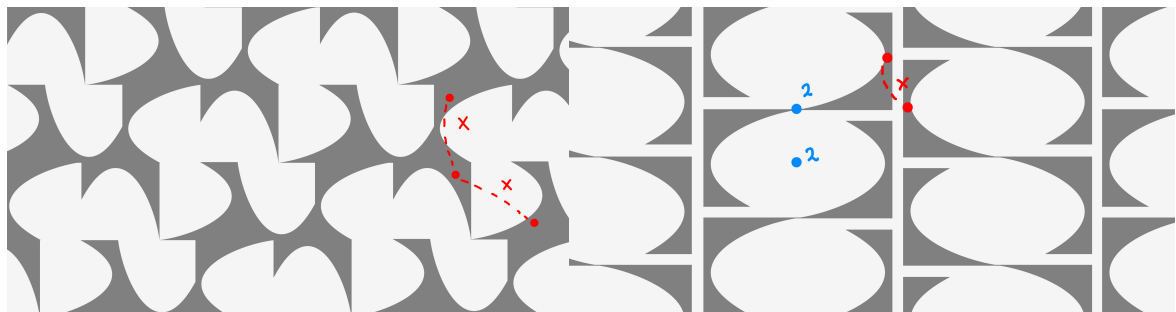
Då två förekomster av en figur, som är varandras speglingar, ligger bredvid varandra så att de inte skiljs åt av en symmetriaxel har vi en **glidreflektion** (eng. *glidereflection*). Dessa betecknas \times . De motsvarar en kombination av reflektion och translation.

I figur 2.14 kan vi se en lodrät reflektionsaxel, men hur formen upprepas uppåt och nedåt går inte att förklara med varken reflektion eller rotation. Detta mönster har då en glidreflektion.



Figur 2.14: Vi kan se den böjda triangelarnas reflektioner upprepas ovanför varandra utan att ha en symmetriaxel mellan dem. Detta mönster har signaturen $*\times$

Här är två till exempel på hur mönster med glidreflektioner kan se ut.



(a) Mönstertyp $\times\times$

(b) Mönstertyp $22\times$

2.3 Magiteoremet

Det så kallade magiteoremet härstammar från faktumet att det endast finns 17 typer av mönster. Det går att bevisa med hjälp av exempelvis orbifolder, vilket är teori alldeles för avancerad för denna avhandling. Det går att förknippa varje symbol i mönstertypen

<i>Rotationscentrum</i>	<i>Kostnad</i>	<i>Speglingsaxel</i>	<i>Kostnad</i>
○	2	* / ×	1
2	1/2	2	1/4
3	2/3	3	1/3
4	3/4	4	3/8
⋮	⋮	⋮	⋮
N	$\frac{N-1}{N}$	N	$\frac{N-1}{2N}$
inf	1	inf	1/2

Figur 2.16: Kostnaden för de olika symmetrierna

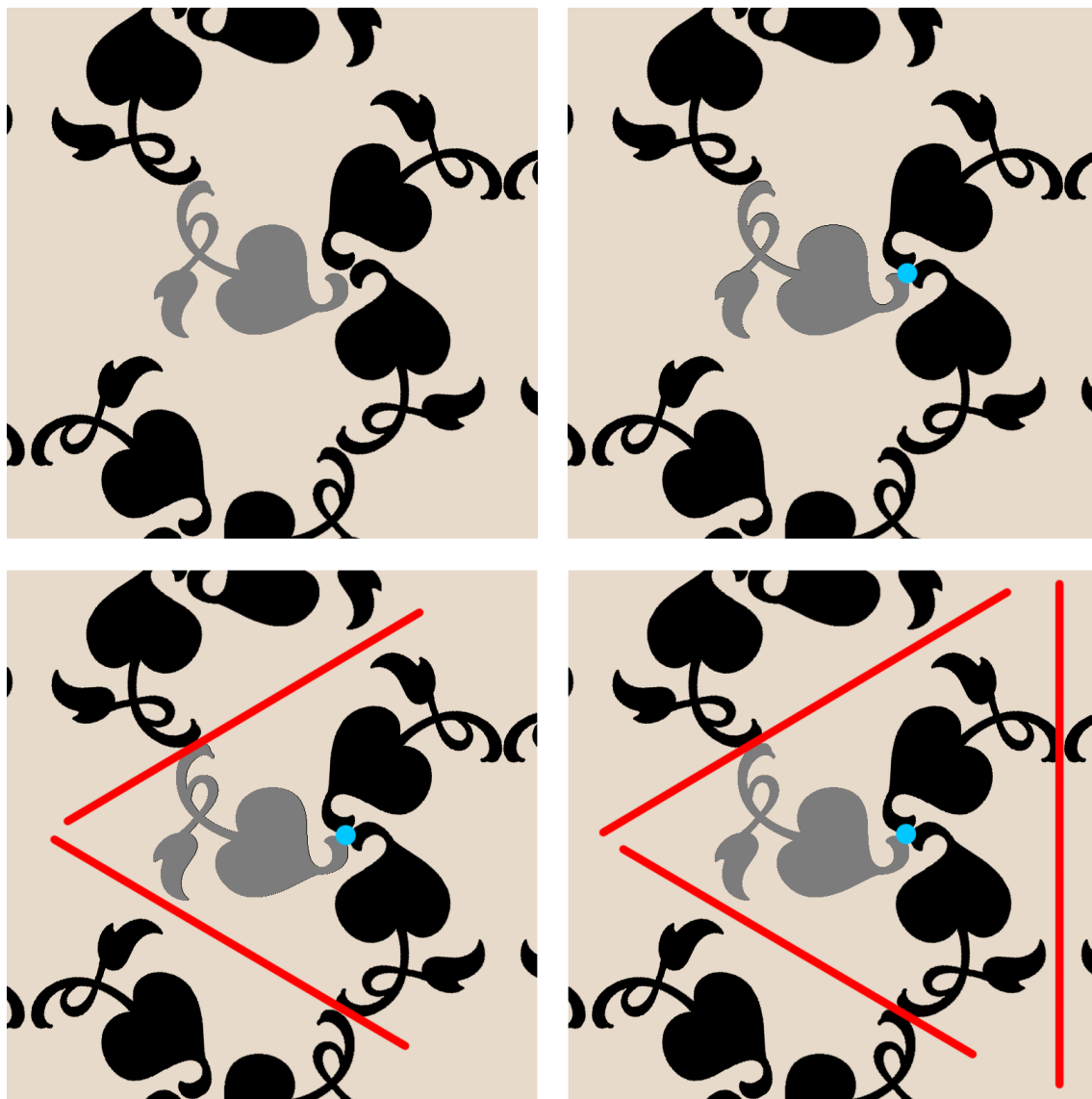
till en slags kostnad, så att den totala kostnaden för tvådimensionella mönster blir 2. Denna association är hjälpsam för att se om ett mönster är ett tvådimensionellt mönster utgående från enbart notation.

Sats 2.3.1. Kostnaden, $cost(P)$, för ett planärt mönster P är $cost(P) = 2$.

Exempel 2.3.1. Låt oss nu se hur vi kan använda magiteoremet för att identifiera mönstret nedan.



Det första steget är att identifiera den figur som upprepas i mönstret. Denna markeras med grå färg i figur 2.17. I nästa steg hittar vi ett trefaldigt rotationscentrum som markeras med en blå cirkel. Från tabellen fås att detta har kostnaden $2/3$. Vi är långt ifrån klara så vi fortsätter leta och finner två symmetriaxlar som vi markerar med rött. Vi har nu mönstertypen 3×2 , vilket har en kostnad, $2/3 + 1 + 1/4$, vars summa är ungefär 1.9. Eftersom detta inte är 2 vet vi att vi ännu inte hittat alla symmetrier i detta mönster. Efter lite sökande hittar vi en sista symmetriaxel och får mönstret 3×3 med en summa $2/3 + 1 + 1/3 = 2$. Vi vet nu att vi har hittat alla symmetrier och att detta mönster är av typen 3×3 .



Figur 2.17

Exempel 2.3.2. En grafisk designer ombeds skapa en tapet med konstsimmare. Kunden i fråga önskar specifikt att tapeten skall använda sig av en bild av en simmare ovanifrån. De vill att tapeten skall ha i sig en ring av fem simmare. Kan vi skapa en mönstertyp som uppfyller detta krav?

Om konstsimmaren skall vara i en ring med fyra andra versioner av sig själv skall vi ha ett rotationscentrum av ordning 5. Detta kostar $\frac{N-1}{N} = \frac{4}{5}$ och då har vi $2 - 4/5 = 6/10$ kvar att spendera på andra symmetrier.

Vi testar om vi kan fylla ut detta med rotation. Då skall $\frac{N-1}{N} = \frac{6}{10}$, men $6+1 = 7 \neq 10$, så vi kan inte använda något annat rotationscentrum.

Vi ser då på reflektioner. Först måste vi ta bort 1 ur budgeten för att lägga till ett \times eller en symmetriaxel, * av någon grad. Då har vi $1/10$ kvar av vår budget. Ekvationen $\frac{N-1}{2N} = 1/10$ har lösningen $N = -10/8$, vilket inte är ett helt tal,

så vi kan inte heller hitta en symmetriaxel som låter oss skapa ett mönster över ett oändligt plan. Eftersom $1/10$ är mindre än även den billigaste reflektionen kan vi inte heller kombinera reflektion och rotation.

Måste vi då säga till kunden att deras tapet inte går att göra alls? Detta är inte fallet. Vi kan låta en ring av vår simmare vara den figur vi upprepar istället för att upprepa bara simmaren själv. Vi är då fria att använda vilken tapetstyp vi vill.

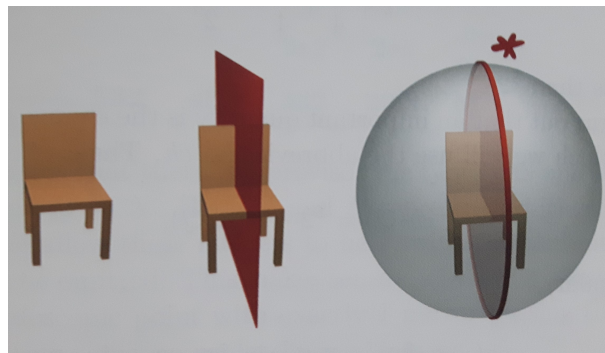
2.4 Mönster i andra plan

I det tidigare avsnittet fick vi se hur magiteoremet kan vara användbart då man arbetar med oändliga tvådimensionella mönster, men det kan också användas till andra typer av mönster. Även om denna avhandling i huvudsak behandlar symmetrier i tvådimensionella plan så är det naturligt att nämna även andra typer av mönster. Den första av dessa är sfäriska mönster.

2.4.1 Sfäriska mönster

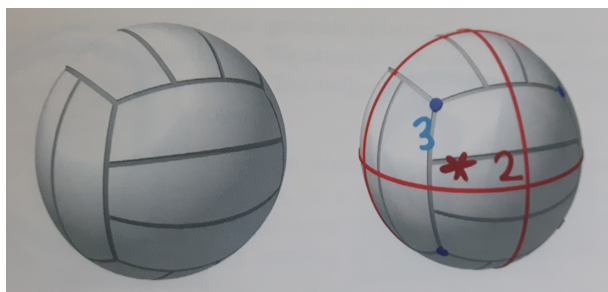
Även om tvådimensionella mönster är mycket vanligare att se omkring sig är sfäriska mönster de facto inte särskilt svåra att finna; se exempelvis på fot- basket- eller tennisbollar. Vi kan även betrakta andra tredimensionella objekt, till exempel stolar, med liknande teori.

Exempel 2.4.1. Betrakta den enkla stolen i figur 2.18. Den har en symmetriaxel i form av ett plan. Man kan även se det som att denna stol är inuti ett klot. Då ritas symmetriaxeln som en linje runt sfären där planet skär sfärens yta. Vi kommer snart att se hur detta liknar hur man ritar mönster på ett klot.



Figur 2.18: Mönstertyp *

Vi ser på ett mönster på en boll. Vi kan hitta en rotationsaxel och två symmetriaxlar. Vi ser tillbaka på tabellen i figur 2.17 och ser att kostnaden för stolens mönster, *, är 1 och bollens mönster, $3 * 2$, är $2/3 + 1 + 1/4 = 23/12$.



Figur 2.19: Mönstertyp $3 * 2$

Att använda magiteoremet för sfäriska mönster är mera komplicerat än för tvådimensionella, därav att summorna vi fick i ovanstående exempel blev olika när de för planära mönster blir lika. Noterbart är hur båda dessa summor är mindre än två. Den totala kostnaden för ett sfäriskt mönster är lika med två minus två dividerat med antalet symmetrier i mönstret. Vi formulerar satsen:

Sats 2.4.1. Kostnaden, $cost(Q)$, för ett sfäriskt mönster Q är

$$cost(Q) = 2 - 2/g,$$

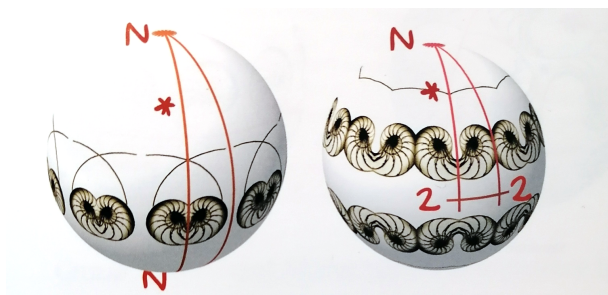
där g är antal symmetrier i Q .

Från magiteoremet kan man hitta alla sfäriska mönstertyper:

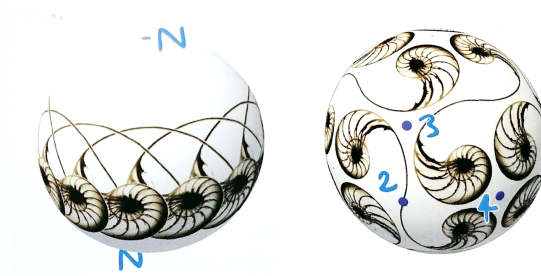
$*MN$	$N*$	MN
$*22N$	$N \times$	$22N$
$*332$	$2 * N$	332
$*432$	$*2$	432
$*532$		$532,$

då fallen $*MN$ och MN endast inträffar då $M = N$. Här representerar N ett godtyckligt, positivt heltal.

Nedan kan ses några exempel på sfäriska mönstertyper. Här ser vi att N i praktiken är antalet gånger vi återfinner figuren som upprepas i tillhörande symmetri.



Figur 2.20: Mönstertyp $*NN$ och $*22N$



Figur 2.21: Mönstertyp NN och 432



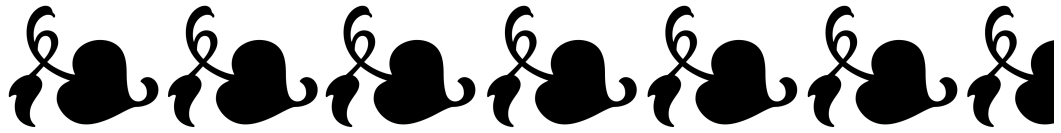
Figur 2.22: Mönstertyp $3 * 32$ och 432

2.4.2 Friezemönster

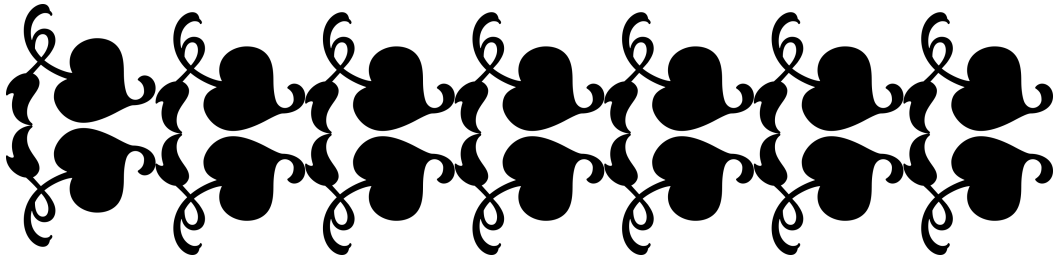
En förenklad, men fortfarande oändlig typ av tvådimensionella mönster är så kallade Friezemönster (*eng. Frieze patterns*). Dessa kan beskrivas som tapetsbårder, det vill säga de är mönster som upprepas oändligt åt ett håll. Medan det finns 17 symmetrigrupper för ett oändligt plan finns det enbart sju symmetrigrupper för friezemönster.

Friezemönster upprepas oändligt, men de kan betraktas som att de loopar som om de är på sidan av en cylinder, eller till och med sfär, med godtyckligt stor diameter. På sådant sätt kan mönstertyperna för dessa fås direkt från typerna för sfäriska mönster. Alla mönstertyper för sfäriska mönster med notationen N i sig är även ett friezemönster, men byter till ∞ eftersom friezemönstren upprepas oändligt.

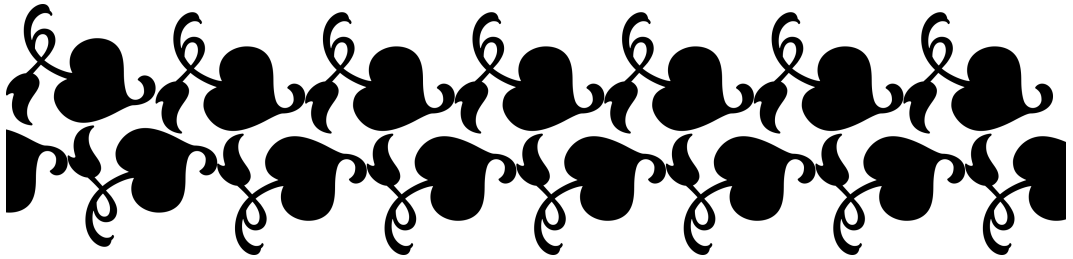
Nedan ses exempel på alla dessa sju typer.



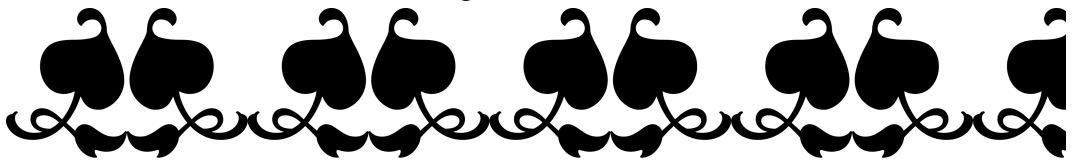
Figur 2.23: $\infty\infty$



Figur 2.24: $\infty*$



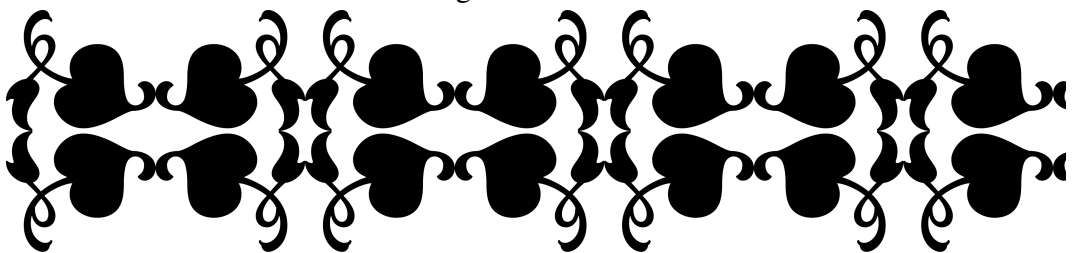
Figur 2.25: $\infty\times$



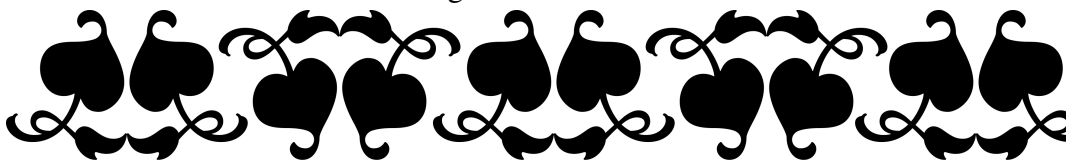
Figur 2.26: $*\infty\infty$



Figur 2.27: 22∞



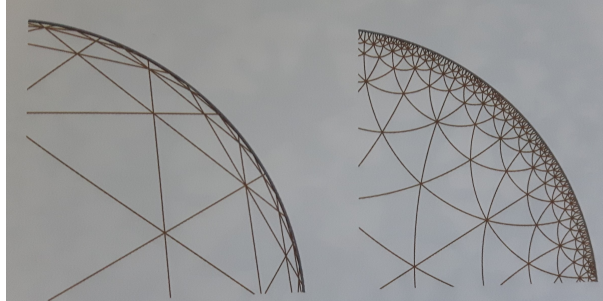
Figur 2.28: $*22\infty$



Figur 2.29: $2 * \infty$

2.4.3 Hyperboliska mönster

Då en sfärisk yta projiceras till en tvådimensionell uppstår det alltid förvrängningar. Ett bra exempel på detta är hur våra kartor kan visa att Grönland är större än Australien, fastän detta i verkligheten inte är fallet. Det hyperboliska planet är vad som brukar användas för att framställa projektioner av sfäriska objekt. De två modeller som oftast används är Klein- och Poincarémodellen.



Figur 2.30: Klein- respektive Poincarémodellen

Kartor är inte det enda vi kan projicera till två dimensioner. Det finns även konstverk då sfäriska mönster framställs hyperboliskt. Återigen återfinns exempel på dessa mönster bland M.C. Eschers verk.



Figur 2.31: M.C. Eschers verk Änglar och Démoner

Kapitel 3

Symmetriernas bakomliggande teori

I detta kapitel utforskas teorin bakom symmetrier. Denna teori är tillräcklig grund för att visa att det finns exakt 17 stycken symmetrigrupper på ett oändligt tvådimensionellt plan. I första avsnittet kommer isometrier att presenteras och viktiga egenskaper visas så att vi i resten av kapitlet kan fokusera på gruppen av alla symmetrier i planet, den Euklidiska gruppen, som helhet.

3.1 Isometrier

I detta avsnitt definieras begreppet isometri och vi bevisar att isometrier alltid är bijektioner mellan rummet \mathbb{R}^n och sig självt.

För två vektorer $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ i \mathbb{R}^n låt oss beteckna den vanliga **skalärprodukten** med

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Låt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vara den motsvarande **vektornormen**.

Betrakta standardbasen $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1)$ som utgör en ortonormerad bas i \mathbb{R}^n . För varje $x \in \mathbb{R}^n$ gäller att

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k,$$

varför $\langle x, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_k \rangle = x_k$, för $k = 1, \dots, n$. Därmed kan varje $x \in \mathbb{R}^n$ skrivas som $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

Definition 3.1.1. En **isometri** är en avbildning $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ som för varje $x, y \in \mathbb{R}^n$ uppfyller $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

Varje isometri g är injektiv eftersom antagandet $g(x) = g(y)$ medför $\|x - y\| = 0$ och därmed $x = y$.

Lemma 3.1.1. Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en isometri med $f(0) = 0$. Då är f linjär.

Bevis. För varje $x, y \in \mathbb{R}^n$ är $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, varför

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|^2 &= \|f(x)\|^2 - \langle f(x), f(y) \rangle - \langle f(y), f(x) \rangle + \|f(y)\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Då $f(0) = 0$ fås att $\|f(x)\| = \|x\|$ och $\|f(y)\| = \|y\|$ och följaktligen att $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ emedan $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle f(y), f(x) \rangle$ och $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Därmed har vi visat att $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^n$. Speciellt får vi att $f(e_1), \dots, f(e_n)$ är en ortonormerad bas i \mathbb{R}^n .

Tag godtyckligt $v \in \mathbb{R}^n$. Då gäller $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, där $\lambda_i = \langle v, e_i \rangle$ för $i = 1, \dots, n$. Vidare gäller $\langle f(v), f(e_i) \rangle = \langle v, e_i \rangle = \lambda_i$ och

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \langle f(v), f(e_i) \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i).$$

Alltså om $v, u \in \mathbb{R}^n$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller

$$\alpha v + u = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i e_i,$$

där $\lambda_i = \langle v, e_i \rangle$ och $\mu_i = \langle u, e_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, eller

$$\alpha v + u = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i + \mu_i) e_i = \sum_{i=1}^n \langle \alpha v + u, e_i \rangle e_i,$$

varför

$$\begin{aligned} \underline{f(\alpha v + u)} &= \sum_{i=1}^n \langle \alpha v + u, e_i \rangle f(e_i) = \alpha \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle f(e_i) + \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle f(e_i) \\ &= \underline{\alpha f(v) + f(u)}. \end{aligned}$$

Således är f linjär. □

Definition 3.1.2. Translation med vektorn $v \in \mathbb{R}^n$ är funktionen $\tau_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definierad av

$$\tau_v(x) = v + x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lemma 3.1.2. För $v \in \mathbb{R}^n$ gäller att τ_v är en isometri med inversen $\tau_v^{-1} = \tau_{-v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Bevis. För $x, y \in \mathbb{R}^n$ gäller $\|\tau_v(x) - \tau_v(y)\| = \|x + v - (y + v)\| = \|x - y\|$. Vidare gäller för $x \in \mathbb{R}^n$ att $(\tau_{-v} \circ \tau_v)(x) = \tau_{-v}(x + v) = x = (\tau_v \circ \tau_{-v})(x)$. □

Sats 3.1.1. Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en isometri, så är den en bijektion.

Bevis. Det är klart att f är injektiv. Betrakta en godtycklig isometri $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sätt $g := \tau_{-f(0)} \circ f$. Då gäller att $g(0) = \tau_{-f(0)}(f(0)) = 0$. Vidare gäller för varje $x, y \in \mathbb{R}^n$ att

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &= \|\tau_{-f(0)}(f(x)) - \tau_{-f(0)}(f(y))\| \\ &= \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \end{aligned}$$

med beaktande av Lemma 3.1.2.

Därmed har vi visat att $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en isometri med $g(0) = 0$. Följaktligen ger Lemma 3.1.1 att g är linjär. Dimensionssatsen (1.0.1) för den linjära avbildningen $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ger att

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim N(g) + \dim V(g).$$

Emedan $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är injektiv och linjär följer att $N(g) = \{0\}$, det vill säga $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim V(g)$. Därmed följer att $\mathbb{R}^n = V(g)$. Det vill säga $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är surjektiv.

Därmed har vi bevisat att g är en bijektion. Eftersom $f = \tau_{f(0)} \circ g$ följer att också f är en bijektion. \square

3.2 Den Euklidiska gruppen

Den **Euklidiska gruppen** $\langle E_2, \circ \rangle$ är den grupp som består av isometrierna $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ under operationen komposition av funktioner \circ . Enligt definition (3.1.1) är en funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ett element i E_2 om den bevarar avstånd. Det vill säga $\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$ för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$. Hädanefter kommer E_2 att syfta på gruppen $\langle E_2, \circ \rangle$.

Från sats 3.1.1 vet vi att isometrier är bijektiva, varför alla element i E_2 är bijektiva. Denna information kan nu användas för att visa att

Sats 3.2.1. E_2 är en grupp.

Bevis. E_2 är en mängd isometrier försedd med kompositionsoperationen \circ . Eftersom f och g bevarar avstånd gör även kompositionen av dessa det och därmed gäller $f \circ g \in E_2$. Därför uppfyller E_2 villkoret för en algebraisk struktur. Vidare kan vi nu betrakta villkoren för en grupp (definition 1.0.2).

Operationen komposition av funktioner opererar associativt, varför elementen i E_2 också opererar associativt. Därmed kan vi se att det första villkoret är uppfyllt. Det andra villkoret säger att det måste finnas ett neutralt element. Den identiska avbildningen $Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definierad som $Id(x) = x$ är klart en isometri och även vårt neutrala element. Slutligen kan vi se att varje element g i E_2 måste ha en invers eftersom de är

bijektioner. Då har g inversen $g^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ så att $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = Id$. För varje $x, y \in \mathbb{R}^2$ gäller att $\|x - y\| = \|g(g^{-1}(x)) - g(g^{-1}(y))\| = \|(g^{-1}(x)) - (g^{-1}(y))\|$, varför g^{-1} är en isometri och därmed tillhör E_2 . \square

En **symmetrigrupp** för ett mönster är gruppen av alla isometrier som opererar på mönstret. De 17 symmetrigrupperna för tvådimensionella mönster är då delgrupper till E_2 eftersom denna innehåller alla möjliga isometrier som kan operera på ett tvådimensionellt plan.

Isometrierna i E_2 går att dela in i tre olika typer; translationer, rotationer och reflektioner.

Minns från definition 3.1.2 att en translation med vektorn $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ är definierad som $\tau(x) = v + x, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. En translation skickar alla punkter i planet åt ett håll. Utgående från vart en translation skickar origo kan vi veta vart den sänder alla punkter eftersom $\tau(0) = v$.

Definition 3.2.1. Rotation θ grader kring origo är funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definierad av

$$f(x) = Mx, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Definition 3.2.2. Reflektion över en linje, som skär origo, med vinkeln θ grader mot positiva x-axlen är funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definierad av

$$f(x) = Mx, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vi har redan visat att translationer är isometrier. Nu skall vi visa att rotation och reflektion också är isometrier.

Låt rotationen $f(x) = Mx, M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ operera på samma punkter och låt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Efter rotation är punkternas nya positioner

$$f(x) = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta \\ x_2 \cos\theta + x_1 \sin\theta \end{pmatrix}$$

och

$$f(y) = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta \\ y_2 \cos\theta + y_1 \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Avståndet $\|f(x) - f(y)\|$ är då

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta - x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)^2 + (y_2 \cos\theta + y_1 \sin\theta - x_2 \cos\theta - x_1 \sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{-\sin(2\theta)(x_1 - y_1)^2(x_2 - y_2)^2 + \cos^2\theta(x_1 - y_1)^2 + \sin^2\theta(x_2 - y_2)^2} \\ & \quad + \sqrt{\sin(2\theta)(x_1 - y_1)^2(x_2 - y_2)^2 + \cos^2\theta(x_1 - y_1)^2 + \sin^2\theta(x_2 - y_2)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)},$$

vilket är densamma som avståndet mellan punkternas ursprungliga positioner:

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \|y - x\| = \|x - y\|.$$

Låt reflektionen $f(x) = Mx$, $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ operera på samma punkter igen. Detta bevisas på samma sätt som för rotationer med endast några teckenskillnader.

Rotationer och reflektioner i E_2 bildar tillsammans en mängd isometrier som kallas **ortogonala isometrier**. Det går att dela in E_2 i två delgrupper, den ena består av de ortogonala isometrierna och den andra av translationer. Att dessa verkligen är delgrupper skall vi nu bevisa.

Sats 3.2.2. Gruppen $\langle T, \circ \rangle$ bestående av translationer i planet under operationen komposition av funktioner, utgör en delgrupp till E_2 .

Tag $\tau_u, \tau_v \in T$ så att $\tau_u(x) = u + x$ och $\tau_v(x) = v + x$, då $u, v, x \in \mathbb{R}^2$. Från Lemma 1.0.1 vet vi att om $\tau_u, \tau_v \in T$ så är T en delgrupp av E_2 om och endast om T är icke-tom och $\tau_u \circ \tau_v^{-1} \in T$.

Translation med $v = (0, 0)$, det vill säga $Id(x) = x$, fungerar som neutralt element. Dess existens visar dessutom att T är icke-tom. Nu återstår endast att undersöka kompositionen $\tau_u \circ \tau_v^{-1}$, där $\tau_v^{-1} \in E_2$ ges i Lemma 3.1.2:

$$\tau_u \circ \tau_v^{-1}(x) = \tau_u((-v) + x) = u + ((-v) + x) = (u - v) + x.$$

Då ser vi att $\tau_u \circ \tau_v^{-1}$ är en translation längs vektorn $u - v$, vilket visar att $\tau_u \circ \tau_v^{-1} \in T$ gäller. Därmed är $\langle T, \circ \rangle$ en delgrupp till E_2 .

Sats 3.2.3. Gruppen $\langle O, \circ \rangle$ bestående av rotationer och reflektioner i planet under operationen komposition av funktioner, utgör en delgrupp till E_2 .

Tag $f_1, f_2 \in O$ så att $f_1(x) = M_\alpha x$ och $f_2(x) = M_\beta x$, då $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ och M_α och M_β är två godtyckliga matriser av formen $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta = \alpha$ respektive $\theta = \beta$.

Vi följer återigen kraven från Lemma 1.0.1. Rotation med en multipel av 2π grader, det vill säga $M_{2\pi n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$, $n \in \mathbb{Z}$, är neutralt element till O . Vi vet då att mängden är icke-tom. Det återstår att visa att $f_1 \circ f_2^{-1}$ tillhör O då $f_2^{-1} = M_{-\beta}x \in E_2$.

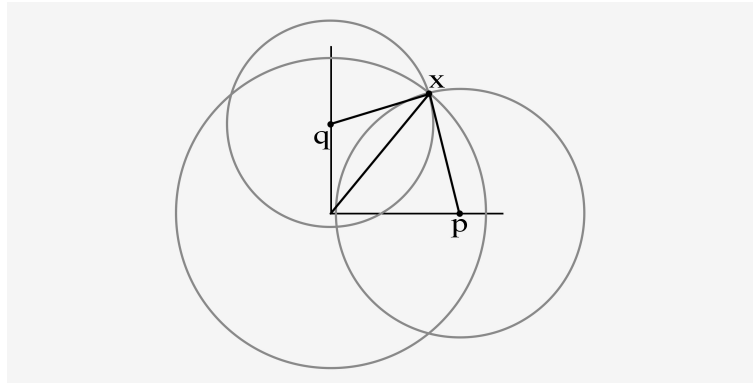
Eftersom produkten $M_{-\beta}x$ är en vektor v blir $f_1 \circ f_2^{-1} = f_1(M_{-\beta}x) = f_1(v) = M_\alpha v$. Eftersom $M_\alpha v \in O$ är även $\langle O, \circ \rangle$ en delgrupp av E_2 .

Hädanefter kommer O och T syfta på delgrupperna $\langle O, \circ \rangle$ och $\langle T, \circ \rangle$.

Sats 3.2.4. Varje element i E_2 går att skriva som en komposition $\tau \circ f$, där τ tillhör T och f tillhör O , och denna framställning är entydig.

Bevis. Antag att $g \in E_2$ och $g(0) = v, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Låt $\tau(0) = v$, då $\tau \in T$. Sätt $f = \tau^{-1} \circ g$ som håller origo fixerad, eftersom $\tau^{-1}(g(0)) = g(0) - v = v - v = 0$. Enligt Lemma 3.1.1 är f linjär, ty f är en isometri.

Påstående: f är en rotation eller reflektion.



Figur 3.1: x är entydigt bestämd av $|x|$, $|x - p|$ och $|x - q|$, ty cirklarna bestående av alla punkter som uppfyller dessa avstånd skilt har endast en gemensam skärningspunkt.

Sätt $p = (1, 0)$ och $q = (0, 1)$. Varje punkt x i planet går att definiera entydigt med hjälp av dess avstånd till origo, p och q , dvs sträckorna

$$\|x\|, \quad \|x - p\|, \quad \|x - q\|.$$

Eftersom f är en isometri och linjär gäller även

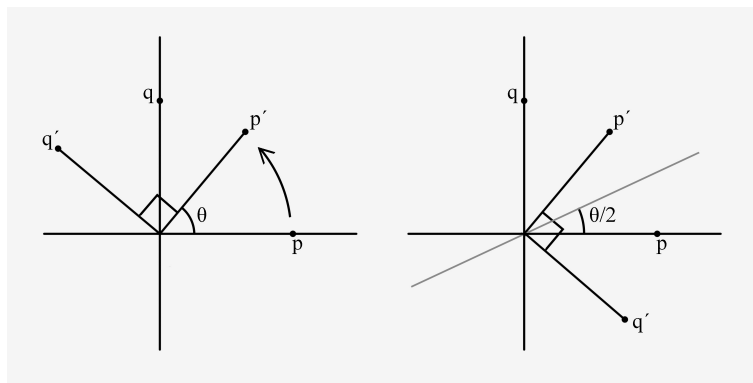
$$\|x\| = \|f(x)\|, \quad \|x - p\| = \|f(x) - f(p)\|, \quad \|x - q\| = \|f(x) - f(q)\|.$$

Därmed vet vi hur f opererar i hela planet om vi vet positionerna för $p(x)$ och $q(x)$.

Enligt vårt antagande för p och q gäller

$$\|f(p)\| = \|p\| = 1, \quad \|f(q)\| = \|q\| = 1, \quad \|f(p) - f(q)\| = \|p - q\| = \sqrt{2},$$

vilket innebär att vinkeln mellan $f(p)$ och $f(q)$ är rät. Då f tar p till $f(p)$, eftersom $\|f(p)\| = \|p\|$, finns två möjligheter för q . Antingen skickas q till $f(q)$ eller $-f(q)$, vilket motsvarar θ graders rotation kring origo respektive reflektion över en linje genom origo som med den positiva x-axeln skapar vinkeln $\theta/2$.



Figur 3.2

Nu kvarstår att visa att framställningen är entydig.

Antag motsatsen, dvs att g har två framställningar $g = \tau_1 \circ f_1 = \tau_2 \circ f_2$, då $\tau_1, \tau_2 \in T$ och $f_1, f_2 \in O$. Detta medför $\tau_2^{-1} \circ \tau_1 = f_2 \circ f_1^{-1}$, där vänsterled tillhör T och högerled tillhör O . Likhet mellan ett element τ i T och ett element f i O kan endast gälla då $g = Id(x)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Detta fås från ekvationen $\tau(x) = f(x)$, som enligt definitionerna på T och O medför $v + x = Mx$ som endast gäller för vektorn $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och matrisen $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. \square

Från ovanstående resultat fås att $E_2 = TO$. Grupperna T och O har endast det neutrala elementet gemensamt, eftersom ingen isometri i O flyttar på origo och alla utom $g = Id(x)$ i T flyttar origo. Elementen i T och O genererar gruppen E_2 . Framställningen $g = \tau \circ f$ ger oss nu den allmänna formen för en isometri g :

$$g(x) = v + Mx,$$

där $x, v \in \mathbb{R}^2$ och $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{pmatrix}$.

Sats 3.2.5. T är en normal delgrupp till E_2 .

Bevis. T är en normal delgrupp om $g \circ \tau \circ g^{-1} \in T$, då $g \in E_2$ och $\tau \in T$.

Antag att $\tau(x) = v + x$ där $v \in \mathbb{R}^2$ och $g(x) = u + Mx$, där $u \in \mathbb{R}^2$ och $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{pmatrix}$. Då gäller för varje x tillhörande \mathbb{R}^2 att

$$\begin{aligned} g \circ \tau \circ g^{-1}(x) &= g(\tau(g^{-1}(x))) = g(v + g^{-1}(x)) = u + M(v + g^{-1}(x)) \\ &= u + Mv + Mg^{-1}(x) = u + Mv + g(g^{-1}(x)) - u = Mv + x. \end{aligned}$$

Eftersom Mv är en vektor oberoende av x är $g \circ \tau \circ g^{-1}(x)$ en translation, varför $g \circ \tau \circ g^{-1}(x) \in T$ gäller och således är T en normal delgrupp av E_2 . \square

Multiplikation

Från och med nu kommer produkten $f \circ g$ mellan två isometrier f, g tillhörande E_2 förkortas till fg .

Genom uppdelningen $E_2 = TO$ kan vi förstå produktstrukturen i gruppen genom andra termer. Låt g och h vara två isometrier tillhörande E_2 med framställningen $g = \tau_1 f_1$ och $h = \tau_2 f_2$, där $g, h \in E_2$, $\tau_1, \tau_2 \in T$ och $f_1, f_2 \in O$. Då är

$$gh = \tau_1 f_1 \tau_2 f_2 = (\tau_1 f_1 \tau_2 f_1^{-1})(f_1 f_2),$$

varav $f_1\tau_2f_1^{-1}$ är en translation eftersom T är en normal delgrupp (sats 3.2.5). Alltså har vi gh uttryckt som en ortogonal transformation (f_1f_2) följt av en translation ($\tau_1f_1\tau_2f_1^{-1}$).

Vi får då framställningen $g = \tau f$ som gäller varje element i E_2 . Vi skall nu beskriva denna framställning ännu noggrannare.

Anta att $g = \tau f$, då $\tau \in T$ och $f \in O$. Om $\tau(0) = v$ och M är den ortogonala matrisen i $f(x) = Mx$ så gäller

$$g(x) = v + f(x) = v + Mx$$

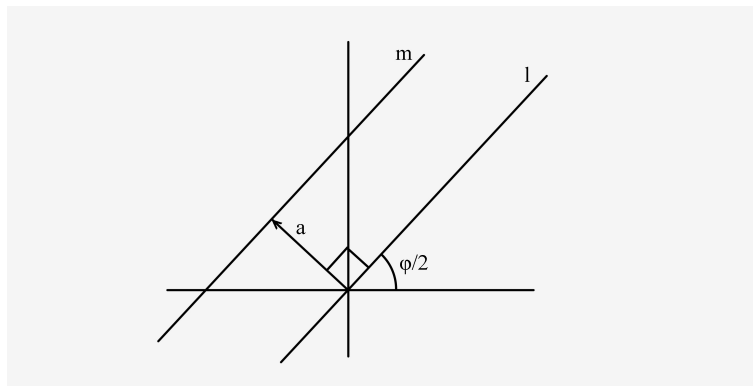
för alla $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Då isometrin g är entydigt bestämd beroende på v och M kan

vi uttrycka den som ett ordnat par (v, M) , då $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ och $M \in O$. Då kan vi skriva multiplikationen av g och en isometri $h = (u, N)$ som

$$(v, M)(u, N)(x) = (v, M)(u + Nx) = (v + Mu + MNx) = (v + Mu, MN)(x).$$

Således har multiplikationen $(v, M)(u, N)$ den motsvarande framställningen $(v + Mu, MN)$.

Exempel 3.2.1. Låt $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ och l, m linjerna som de visas i figur 3.3.



Figur 3.3

Vi skriver några isometrier i formen (v, M) .

1. Translation längs vektorn v blir (v, I) , där I är identitetsmatrisen.
2. Rotation moturs θ grader runt origo är $(0, A)$.
3. Reflektion över linjen l är $(0, B)$.
4. Rotation moturs θ grader runt punkten c är $(c - f_A(c), A)$.

Motivering: rotation kring c sänder varje vektor x till $c + f_A(x - c)$, se figur 3.4, och eftersom

$$c + f_A(x - c) = c + f_A(x) - f_A(c) = (c - f_A(c)) + f_A(x)$$

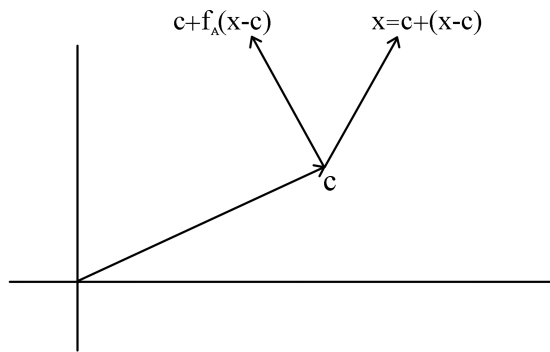
får vi vårt v till $c - f_A(c)$.

5. Reflektion över linjen m är $(2a, B)$. Notera att $f_B(a) = -a$.

Motivering: vi utför en translation längs $-a$ så att m skickas till l och reflekterar över l för att sen translatera tillbaka längs a . Det betyder att x skickas till $x - a$, sen $f_B(x - a)$ och slutligen till

$$a + f_B(x - a) = a + f_B(x) - f_B(a) = a + f_B(x) + a = 2a + f_B(x).$$

6. En reflektion över en linje följt av en translation längs samma linje kallas för en **glidreflektion**. Varje glidreflektion som reflekterar över m och translaterar längs m har formen $(2a + b, B)$, då $f_B(b) = b$ och $b \neq 0$.



Figur 3.4

Exempel 3.2.2. Låt $g = (v, M)$, med $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ och M matrisen för spegling med

$\theta = \frac{4\pi}{3}$ grader, varför $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Då får vi att

$$g(x) = v + M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}x_2}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x_1 + \sqrt{3}x_2) \\ 4 + \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x_1 + x_2) \end{pmatrix}$$

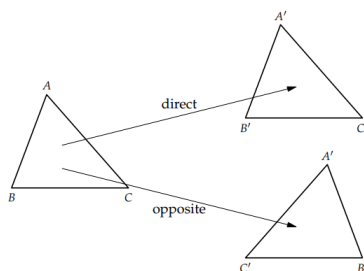
Om vi nu låter $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ så får vi $g(y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 - 3\sqrt{3}) \\ 4 + \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{5-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Vi kan se att g är en glidreflektion eftersom $g(g(y)) = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}-1}{4} - \frac{5\sqrt{3}-3}{4} \\ -\frac{3-\sqrt{3}}{4} + \frac{5-\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 - 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3) \\ -\frac{1}{4}(-3 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ är olika y , men likhet gäller då g är en reflektion.

3.2.1 Direkta och motsatta isometrier

Betrakta en triangel med hörnen namngivna A , B respektive C motsols. Om vi roterar eller translaterar triangeln kommer hörnen fortfarande vara ordnade motsols. Dessa symmetrier brukar kallas för **direkta**. Om vi reflekterar eller glidreflekterar triangeln kommer hörnen att vara ordnade medsols. Dessa symmetrier kallas för **motsatta**. Detta innebär att en isometri $g = \tau f$ är direkt respektive motsatt då f är en rotation eller reflektion.

Låt $g = \tau f_M$ vara en isometri i E_2 , där $\tau \in T$, $f_M \in O$ och $f_M(x) = Mx$ då $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{pmatrix}$. Då gäller att determinanten för M är 1 då f är direkt och -1 då f är motsatt.



Figur 3.5

Sats 3.2.6. Varje direkt isometri är antingen en translation eller en rotation. Varje motsatt isometri är antingen en reflektion eller en glidreflektion.

Bevis. Låt g vara en isometri i E_2 . Då kan vi skriva g som (v, M) , då $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ och $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{pmatrix}$.

Vid specialfallet $\theta = 0$ är M enhetsmatrisen Id och g är då en translation. Determinanten $\det(Id) = 1$ så translationer är direkta isometrier.

Då $\theta \neq 0$ fås de två fallen $\det(M) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ och $\det(M) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$. Därmed är rotationer direkta isometrier och reflektioner är motsatta.

Låt $f = (v, M)$ vara en godtycklig reflektion över en linje l och $t = (v, Id)$ en translation längs l . Då fås en godtycklig glidreflektion från $g = (u, Id)(v, M) = (u + v, M)$. Eftersom f är en reflektion och g beror av samma matris är glidreflektioner också motsatta isometrier. \square

3.2.2 Gitter och punktgrupper

Definiera π som en avbildning $E_2 \rightarrow O$ genom $\pi(v, M) = M$, där $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp \sin\theta \\ \sin\theta & \pm \cos\theta \end{pmatrix}$.

Då är π en homomorfism, ty $\pi((v, m)(v_1, M_1)) = \pi(v + Mv_1, MM_1) = MM_1 = \pi(v, M)\pi(v_1, M_1)$, vars nollrum består av translationer eftersom $\pi(v, Id) = Id$, $v \in \mathbb{R}^2$.

Antag att G är en delgrupp till E_2 och $T = \{\tau : \tau = (v, Id), v \in \mathbb{R}^2\}$. Då har G en **translationsdelgrupp** $H = G \cap T$ och **punktgrupp** $J = \pi(G) = \{M : (v, M) \in G\}$, det vill säga alla M där $(v, M) \in G$.

Låt oss visa att translations- och punktgruppen faktiskt är grupper. Genom att använda sats 1.0.2 blir första delen enkel. Vi vet att G , T och O är delgrupper till E_2 . Eftersom $H = G \cap T$ är H också en delgrupp av E_2 .

Låt $M, N, O \in J$. Då gäller att $M(NO) = (MN)O$, vi har ett neutralt element, enhetsmatrisen Id , eftersom $IdM = MId = M$ samt det finns en invers $M_\varphi^{-1} = M_{-\varphi}$ så att $M_\varphi M_{-\varphi} = M_0 = Id$. Därmed är även J en grupp.

J är isomorf med kvotgruppen G/H , eftersom restriktionen π till G är en surjektiv homomorfism från G till J med nollrummet $N(\pi) = H$. Resultatet följer sedan från första isomorfiteomet (1.0.3).

Definition 3.2.3. Låt $\langle M \rangle$ beteckna snittet av alla undergrupper till G som innehåller M . Då sägs M vara **generator** till $\langle M \rangle$ och $\langle M \rangle$ **genereras** av M . Gruppen $\langle M \rangle$ är den minsta undergrupp av G som innehåller M .

Detta innebär att alla element i gruppen $\langle M \rangle$ kan uttryckas som en produkt av elementen i M och dess inverser.

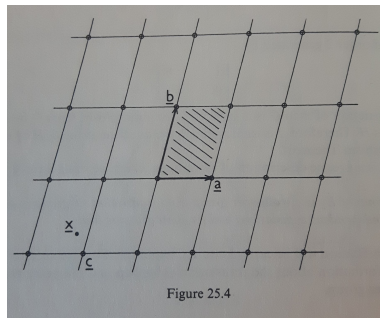
Definition 3.2.4. En **tapetgrupp**, (eng. *wallpaper group*), är en delgrupp av E_2 vars generator innehåller två oberoende translationer och vars punktgrupp är ändlig.

Hädanefter kommer beteckningen G stå för en tapetgrupp med tillhörande translationsgrupp H och punktgrupp J .

Låt L vara mängden punkter som origo förflyttas till då isometrierna i H opererar på \mathbb{R}^2 . L innehåller två oberoende vektorer eftersom H genereras av två oberoende translationer. Låt vektorn $a \neq 0$ vara sådan att den har två olika punkter i L som start- och slutpunkt så att $\|a\|$ är så liten som möjligt. Välj sedan b , icke parallell med a , men annars med samma krav. I figur 3.6 finns ett exempel på hur valet av a och b kan se ut. Nu kan vi formulera definitionen för ett gitter:

Sats 3.2.7. Mängden L är det **gitter** som består av alla linjära kombinationer av a och b , det vill säga $ma + nb$, $m, n \in \mathbb{Z}$, då a och b är valda som beskrivet i ovanstående stycke.

Bevis. Mellan T och gruppen \mathbb{R} finns en isomorfi $(v, Id) \rightarrow v$. Samma isomorfi finns även mellan H till L eftersom dessa är delgrupper till och isomorfa med T respektive \mathbb{R} . Med hjälp av punkterna i detta gitter kan vi dela upp planet i parallelogram, se figur 3.6. Antag att x tillhör L men inte ligger i gittret. Punkten x ligger då i ett parallelogram vars närmsta hörn vi döper c . Då är vektorn $x - c$ inte nollvektorn, inte a eller b samt kortare än $\|b\|$. Vektorn måste höra till L eftersom både x och c gör det. Om $x - c \leq a$ har vi en motsägelse eftersom a är minsta längden i L . Då måste det gälla att $a \leq x - c \leq b$. Om vektorn tillhör L kan den inte korsa eller vara parallell med a , men detta motsäger vårt val av b som kortast möjliga val. Detta resulterar i att punkten x inte kan tillhöra gittret L .

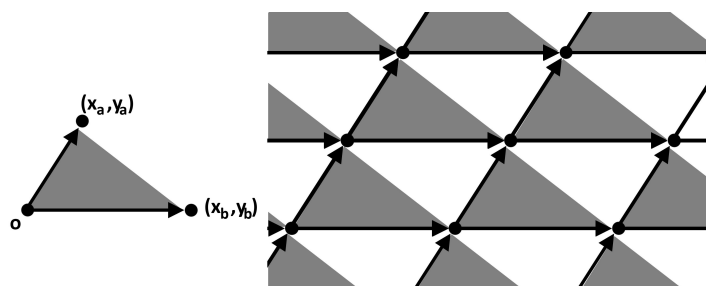


Figur 3.6

□

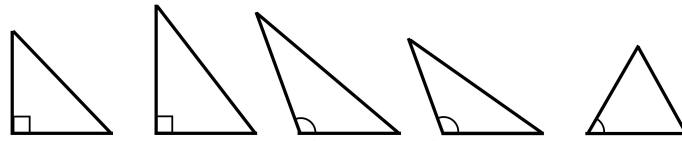
Det går att bygga upp ett helt 2-dimensionellt gitter med en punkt och två vektorer. Om vi har vektorerna $a = (x_a, y_a)$ och $b = (x_b, y_b)$ som utgår från en punkt som väljs till origo, $O = (0, 0)$, kan vi få vilken punkt p som helst i gittret genom $p = (nx_a + mx_b, ny_a + my_b)$ då n och m är heltal.

Det finns fem olika typer av gitter. Detta kan vi visa genom att vi betraktar den triangel som fås då vi drar linjer mellan punkterna $(0, 0)$, (x_a, y_a) och (x_b, y_b) . Om vi tar reda på hur många olika typer av trianglar vi kan rita vet vi också hur många olika gitter vi kan generera med dessa. Nu kommer frågan vad för egenskaper som gör dem olika. Detta svar fås enkelt om vi tänker på mosaikmönster; om vi roterar det eller tänjer på det kommer det förbli samma mönster, men då 90 graders vinklar och lika långa sidor ändrar kan saker hända med det.



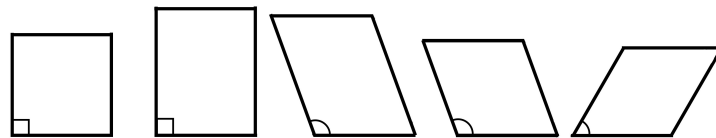
Figur 3.7

Då vi har en rätvinklig triangel har vi två alternativ; antingen har den oliklånga sidor eller så är den likbent. Om den inte är rätvinklig kan den ha oliklånga sidor, vara likbent eller liksidig. Detta blir totalt fem olika trianglar, därav kan vi generera fem typer av gitter.



Figur 3.8

Ett gitter delar upp planet i fyrhörningar. Dessa kan ha en av fem olika former, vilka delar in de tvådimensionella gittren i fem typer som kallas för **Bravaisgitter**. De fem typerna är kvadratisk, rektangulärt, skevt, centrerat rektangulärt och hexagonalt (*eng. square, rectangular, oblique, centered rectangular resp. hexagonal*).



Figur 3.9

Sats 3.2.8. Punktgruppen $J = \{M : (v, M) \in G\}$ opererar på gittret L , det vill säga $Mx \in L$ då $M \in J$ för varje $x \in L$.

Bevis. J är en delgrupp av O så gruppen opererar på planet på ett bekant sätt. Om $M \in J$ och $x \in L$ måste vi visa att $f_M(x) = Mx \in L$.

Antag $\pi(g) = M$, $g = (v, M) = v + f_M$ och att τ är translationen (x, I) . Eftersom $H = N(\pi)$ så är H en normal delgrupp av G eftersom det gäller att

$$\begin{aligned} g\tau g^{-1} &= (v, M)(x, Id)(-f_M^{-1}(v), M^{-1}) = (v + f_M(x - f_M^{-1}(v)), MM^{-1}) \\ &= (v + f_M(x) - v, Id) = (f_M(x), Id) \end{aligned}$$

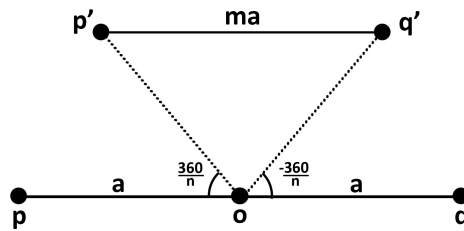
ligger i H . Då ser vi dessutom att $f_M(x)$ är en punkt i L . □

Ordningen n av en isometri g är hur många gånger den behöver upprepas för att återvända till ursprunsläget. Som exempel kan vi anta att f är rotation med $\phi = 120^\circ$ då gäller $f^3 = Id$ så ordningen av f är $n = 3$.

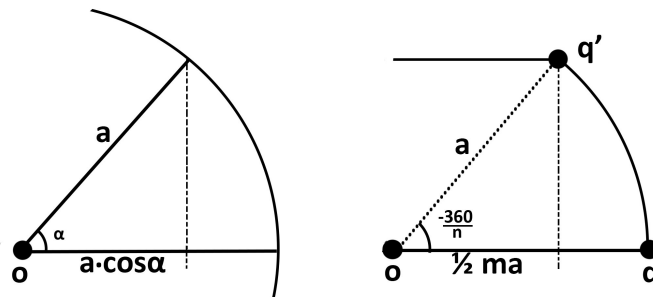
Sats 3.2.9. (Den kristallografiska restriktionen) Ordningen av en rotation i en tapetsgrupp kan bara vara 2,3,4 eller 6.

Bevis. Låt rotationen $f_M(x) = Mx$ med α grader vara av ordning n . Från definitionen för ordning vet vi att $f_M^n = Id$. Då Id är rotation med 360 grader fås att $\alpha = 360^\circ/n$.

Antag att vi har en godtycklig symmetrigrupp med ett tillhörande gitter L . Låt en av punkterna i L vara vårt rotationscentrum o . Döp två punkter p och q med avståndet a till o så att dessa ligger på en rak linje, se figur 3.10. Om vi nu roterar p med $-360^\circ/n$ och q med $360^\circ/n$ kan punkterna tillhöra G endast om avståndet mellan p och q är ma , då m är ett positivt heltal (enligt definitionen på gitter (3.2.7)).



Figur 3.10



Figur 3.11: Ekvationen $\cos \frac{360}{n} = \frac{ma}{2a}$ fås direkt ur definitionen på cosinus.

Definitionen på cosinus ger oss $\cos \frac{360}{n} = \frac{ma}{2a}$, det vill säga $m = 2 \cos \frac{360}{n}$. Eftersom vi vet att m är ett heltal söker vi alla heltalslösningar till $2 \cos(360/n)$. Vår ekvation har maximum 2 och minimum -2 så vi behöver endast undersöka fallen $m = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Vi löser ut n och sätter in våra m i ekvationen:

$$m = -2 \quad n = \frac{360}{\arccos(-1)} = \frac{360}{180} = 2$$

$$m = -1 \quad \frac{360}{\arccos(-1/2)} = \frac{360}{120} = 3$$

$$m = 0 \quad \frac{360}{\arccos(0)} = \frac{360}{90} = 4$$

$$m = 1 \quad \frac{360}{\arccos(1/2)} = \frac{360}{60} = 6$$

$$m = 2 \quad \frac{360}{\arccos(1)} = \frac{360}{0} \stackrel{0^\circ=360^\circ}{=} \frac{360}{360} = 1$$

Vi har då bevisat att n endast antar värdena $\{1, 2, 3, 4, 6\}$. □

Korollarium 3.2.1. J genereras av rotation genom en av vinklarna $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ och eventuellt en reflektion.

Sats 3.2.10. En isomorfism mellan tapetsmönster tar translationer till translationer, rotationer till rotationer, reflektioner till reflektioner och glidreflektioner till glidreflektioner.

Bevis. Låt ϕ vara en isomorfism mellan två tapetsmönster G och G_1 och låt τ vara en translation i G . Translationer och glidningar har oändlig ordning medan rotationer och reflektioner är av ändlig ordning. Till följd av detta måste $\phi(\tau)$ vara antingen en translation eller en glidning. Antag att $\phi(\tau)$ är en glidning och välj en translation τ_1 ur G_1 som inte kommuterar med $\phi(\tau)$. Detta innebär att alla translationer som inte är parallella med glidlinjen är tillåtna. Om $\phi(g) = \tau_1$ måste g vara en translation eller glidning. Då gäller att g^2 är en translation och följdaktligen kommuterar med τ vilket är en motsägelse mot antagandet att $\phi(g^2) = \tau_1^2$ inte kommuterar med $\phi(\tau)$. Därmed måste translationer föras till translationer och glidningar till glidningar.

Reflektioner är av ordning två. Detta innebär att bilden av en reflektion under en isomorfism antingen är en reflektion eller ett halvt varvs rotation. Låt $g \in G$ vara en reflektion vars bild $\phi(g)$ är ett halvt varvs rotation och välj en translation τ från G i en riktning som inte är vinkelrät med speglinglinjen i g . Då är τg en glidning, men $\phi(\tau g) = \phi(\tau)\phi(g)$ är produkten av en translation och ett halvt varvs rotation vilket motsvarar en annan rotation på ett halvt varv. Därmed har vi en motsägelse och reflektioner förs till reflektioner. Slutligen kan då rotationer endast föras till rotationer. □

Korollarium 3.2.2. Om två tapetsgrupper är isomorfa så är deras punktgrupper isomorfa.

Kapitel 4

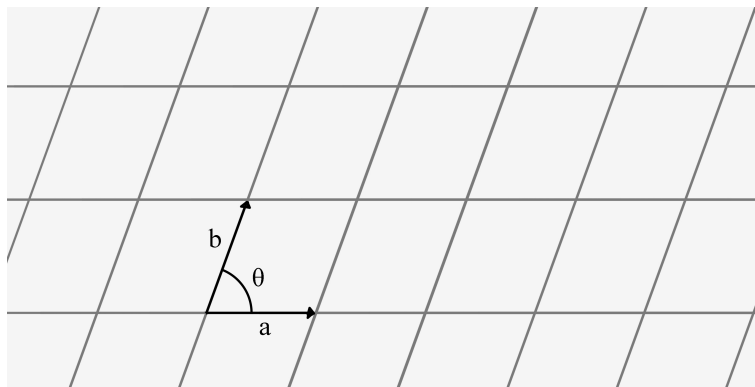
De 17 symmetrigrupperna

4.0.1 Vi söker symmetrigrupperna

För att finna alla 17 stycken symmetrigrupper ser vi på de fem olika Bravaisgittern skilt och finner deras olika tillhörande symmetrigrupper. Sedan kan vi påvisa att många av dem är isomorfa vilket i slutet ger oss 17 stycken entydiga grupper. Givet ett gitter L ser vi först vilka ortogonala transformationer som bevarar gittret. Vi vet från Sats 3.2.8 att en symmetrigrupp som ligger på L måste ha en punktgrupp som är en delgrupp av dessa transformationer.

Genom detta kapitel kommer vi att beteckna rotationsmatrisen $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ som A_θ och reflektionsmatrisen $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ som B_θ .

Skevt gitter



Figur 4.1: $a = b$, $0 < \theta < \pi/2$

Ett skevt gitter L genereras av två vektorer $a \neq b$ vars mellanliggande vinkel θ uppfyller $0 < \theta < \pi/2$. Gittret bevaras av endast två ortogonala transformationer; identitetstransformationen och tvåfaldig rotation, A_π . Elementen i punktgruppen J måste då vara en delmängd av $\{Id, A_\pi\}$. Detta ger oss två olika fall för detta gitter: $J = \{Id\}$ och $J = \{Id, A_\pi\}$. Dessa fall skrivs i skilda stycken som indexeraras enligt namnen på mönstren de motsvarar.

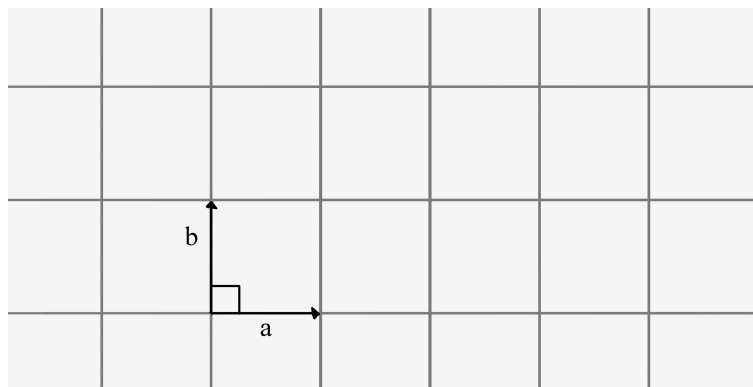
(o) Om $J = \{Id\}$ är G genererat endast av två olika translationer. Gruppens element har formen $(ma + nb, Id)$, där m och n ligger i \mathbb{Z} .

(2222) Om $J = \{Id, A_\pi\}$ har vi en rotation på ett halvt varv. För att $(0, A_\pi)$ säkert skall höra till G väljer vi fixpunkten för transformationen som origo. Unionen av de två högerklasserna $H(0, Id) = H$ och $H(0, A_\pi)$ bör bilda vår grupp G och vi kan se att detta stämmer eftersom den är en delgrupp av E_2 . Elementen i gruppen som är ortogonala transformationer ligger i $H(0, A_\pi)$ och är av formen

$$(ma + nb, Id)(0, A_\pi) = (ma + nb, A_\pi), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Med andra ord ligger alla fixpunkter för rotation på punkterna $\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}nb$.

Rektangulärt gitter



Figur 4.2: $a \neq b, \theta = \pi/2$

De ortogonala transformationer som bevarar L är nu $\{Id, A_\pi, B_0, B_\pi\}$. Eftersom vi är intresserade av att finna nya grupper kan vi ignorera o och 2222 ovan.

(**) $J = \{Id, B_0\}$ och G innehåller en reflektion i en horisontell spegel.

($\times\times$) Antag att J är densamma som ovan, men vi har inga reflektioner. Då måste G innehålla en glidreflektion på en horisontell linje. Sätt nu origo på denna linje. Eftersom en glidreflektion upprepad en gång är en translation har vår glidreflektion formen $(\frac{1}{2}ka, B_0)$, där k är ett heltal, $((\frac{1}{2}ka, B_0))^2 = (ka, Id)$ är en translation och därmed uppfyller formen kriteriet).

Om k är ett jämnt tal så är $(-\frac{1}{2}ka, Id)$ en translation som tillhör G . Detta innebär då att

$$(-\frac{1}{2}ka, Id)(\frac{1}{2}ka, B_0) = (0, B_0)$$

också tillhör G , men detta är en reflektion så vi har då en motsägelse. Däremot om k är ett udda tal fås

$$(-\frac{1}{2}(k-1)a, Id)(\frac{1}{2}ka, B_0) = (\frac{1}{2}a, B_0),$$

vilket är en glidreflektion så detta medför inte en motsägelse. Elementen i G som inte är translationer har formen $(ma + nb, Id)(\frac{1}{2}a, B_0) = ((m + \frac{1}{2})a + nb, B_0)$.

Om vi har $J = \{Id, B_\pi\}$ kommer vi att få samma fall som ovan, fast istället för horisontella speglar och glidreflektioner har vi vertikala. Dessa kommer därmed att vara isomorfa med $(**)$ och $(\times \times)$.

(*2222) $J = \{Id, A_\pi, B_0, B_\pi\}$. Detta fall har en reflektion i en horisontell och en vertikal spegel.

(22*) J är som ovan $\{Id, A_\pi, B_0, B_\pi\}$, men antag att vi har reflektion i horisontell spegel, men inte i vertikal. Då måste B_π motsvara en glidreflektion i G . Välj nu origo som skärningspunkten mellan den horisontala spegeln och den vertikala glidlinjen. Med samma resonemang som i $\times \times$ motiverar vi nu att $(0, B_0)$ och $(\frac{1}{2}b, B_\pi)$ ligger i G . Då ligger elementet

$$(\frac{1}{2}b, B_\pi)(0, B_0) = (\frac{1}{2}b, A_\pi),$$

som är ett halvt varvs rotation kring $\frac{1}{2}b$, också i G .

G genereras av högerklasserna $H, H(0, B_0), H(\frac{1}{2}b, B_\pi)$, och $H(\frac{1}{2}b, A_\pi)$. Ett element i G som hör till den andra sidoklassen har formen

$$(ma + nb, Id)(0, B_0) = (ma + nb, B_0),$$

vilket motsvarar en reflektion i en horisontell spegel då $m = 0$. Då m är olika noll blir spegellinjen till en glidlinje. Ett element i tredje sidoklassen har formen

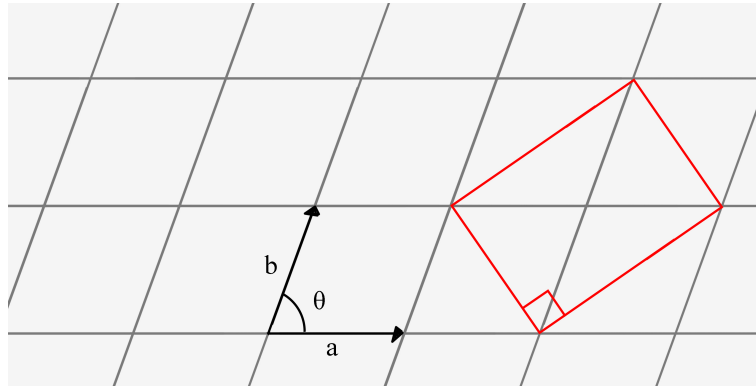
$$(ma + nb, Id)(\frac{1}{2}b, B_\pi) = (ma + (n + \frac{1}{2})b, B_0),$$

vilket motsvarar vertikala glidreflektioner. Slutligen gäller för den sista högerklassen att de rotationscentrum som uppstår finns i punkterna $\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})b$.

Om vi istället väljer att vi har glidreflektion i horisontell linje och reflektion i vertikal kommer vi att få en symmetrigrupp som är isomorf med ovanstående.

(22 \times) Återigen väljer vi $J = \{Id, A_\pi, B_0, B_\pi\}$, men denna gång har vi inga reflektioner i G .

Centrerat rektangulärt gitter



Figur 4.3: Namnet på detta gitter kommer ifrån att det skapas en rektangel med en punkt perfekt centrerad inuti. $a = b$, $0 < \theta < \pi/2$, $\theta \neq \pi/3$

För detta gitter gäller återigen att J skall vara en delmängd av $\{Id, A_\pi, B_0, B_\pi\}$. Vi kan finna två nya grupper.

(* \times) Anta att J återigen är $\{Id, B_0\}$, men att isometrin $(v, B_0) \in G$ är antingen en reflektion i en horisontell spegel eller en glidreflektion längs en horisontell linje. Sätt origo på denna linje och anta att $2v$ är en multipel av a . Den vertikala ritningen är bestämd av $2b - a$.

Om $2v = ka$ och k är jämnt är

$$\left(-\frac{1}{2}ka, I\right)\left(\frac{1}{2}a, B_0\right) = (0, B_0)$$

en reflektion som tillhör G . Elementen i G som inte är translationer har formen

$$(ma - nb, B_0) = \left(\left(m + \frac{1}{2}n\right)a + \frac{1}{2}n(2b - a), B_0\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

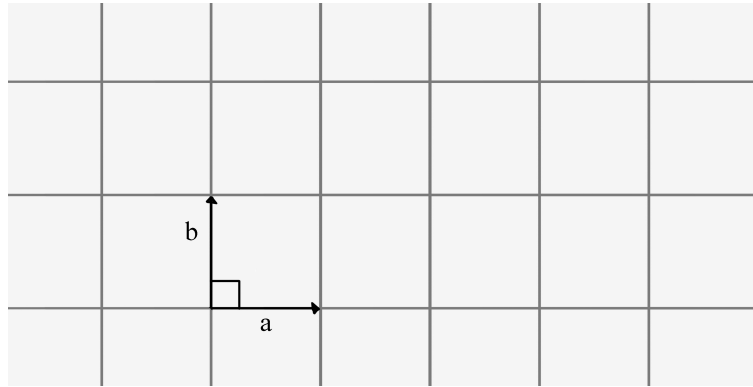
Då n är jämnt och $m = -\frac{1}{2}n$ får vi alla reflektioner i horisontella speglingar som ligger i gittrets noder. Då n är jämnt och $m \neq -\frac{1}{2}n$ blir dessa speglar glidlinjer. Då n är udda får vi glidlinjer som ligger halvvägs mellan gittrets noder.

Om k är udda får vi en variant av reflektionen ovan som leder till samma resultat.

Om vi behandlar $J = \{Id, B_\pi\}$ på samma sätt som ovan får vi en grupp som är isomorf med $*\times$.

(2*22) $J = \{Id, A_\pi, B_0, B_\pi\}$. Med liknande beräkningar som i ovanstående symmetri-grupp kan man visa att både B_0 och B_π kan fås med reflektioner i G .

Kvadratisk gitter



Figur 4.4: $a = b, \theta = \pi/2$

Detta gitter bevaras av den dihedrala gruppen D_8 genererad av $A_{\pi/2}$ och B_0 , det vill säga $\{Id, A_{\pi/2}, A_{\pi}, A_{3\pi/2}, B_0, B_{\pi/2}, B_{\pi}, B_{3\pi/2}\}$. För att komma fram till nya symmetrigrupper måste vi inkludera rotationen i J .

(442) J genereras av $A_{\pi/2}$.

(*442) J genereras av $A_{\pi/2}$ och B_0 där B_0 är en reflektion i G .

(4 * 2) Antag att J genereras av $A_{\pi/2}$ och B_0 där B_0 inte är en reflektion i G . Välj fixpunkten för rotationen av ordning fyra som origo. Då tillhör $(0, A_{\pi/2})$ gruppen G . Låt $(ka + ib, B_0)$ motsvara en isometri med B_0 som tillhör G . Eftersom $(ka + ib, B_0)^2 = (2ka, I)$ skall tillhöra G måste $2k$ vara ett heltal.

Om $2k$ är jämnt ligger reflektionen

$$(-ka, I)(ka + ib, B_0) = (ib, B_0)$$

i G , vilket motsäger vårt antagande. Därmed måste $2k$ vara udda.

Då $2k$ är udda gäller att

$$\left(\left(\frac{1}{2} - k\right)a, I\right)(ka + ib, B_0) = \left(\frac{1}{2}a + ib, B_0\right)$$

tillhör G . Vidare vet vi att isometrierna

$$(0, A_{\pi/2})\left(\frac{1}{2}a + ib, B_0\right) = \left(\frac{1}{2}b - ia, B_{\pi/2}\right)$$

och

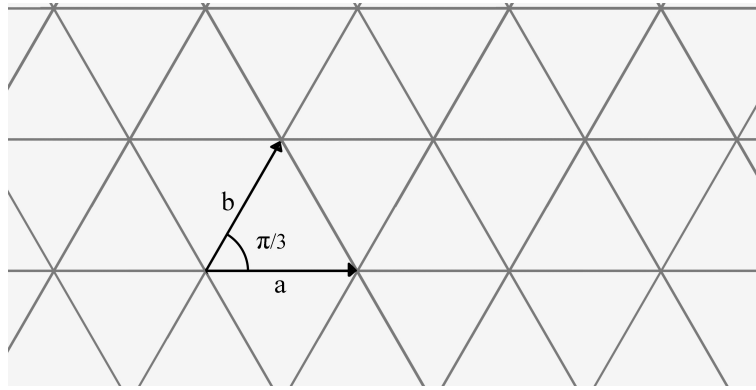
$$\left(\frac{1}{2}b - ia, B_{\pi/2}\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{2} - i\right)(a + b), I\right)$$

även ligger i G . Därmed ser vi att $\frac{1}{2} - k$ är ett heltal. Därmed kan vi se att glidningen

$$\left(\left(\frac{1}{2} - i\right)(a + b), I\right)\left(\frac{1}{2}a + ib, B_0\right) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, B_0\right)$$

hör till G .

Hexagonalt gitter



Figur 4.5: $a = b, \theta = \pi/3$

Den sista typen av gitter bevaras av den dihedrala gruppen D_{12} genererad av $A_{\pi/3}$ och B_0 . Vi kan finna nya symmetrigrupper då vi undersöker punktgrupper med rotationer av ordning 3 och 6.

(333) J genereras av $\{A_{\frac{2\pi}{3}}\}$.

(*333) J genereras av $\{A_{\frac{2\pi}{3}}\}$ och B_0 .

(3 * 3) Antag att J genereras av $\{A_{\frac{2\pi}{3}}\}$ och $B_{\frac{\pi}{3}}$. Välj fixpunkten för den trefaldiga rotationen till origo så att $(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$ ligger i G och låt $(ka + ib, B_{\frac{\pi}{3}})$ motsvara en isometri med $B_{\frac{\pi}{3}}$ som tillhör G . Eftersom $(ka + ib, B_{\frac{\pi}{3}})^2 = ((k + i)(a + b), I)$ måste $k + i$ vara ett heltal. Produkterna

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(ka + ib, B_{\frac{\pi}{3}}) = (k(b - a) - ia, B_{\pi})$$

och

$$(k(b - a) - ia, B_{\pi})^2 = (k(2b - a), I)$$

ligger också i G så k måste vara ett heltal vilket medför att i också är det. Detta gör att reflektionen

$$(-ka - ib, I)(ka + ib, B_{\frac{\pi}{3}}) = (0, B_{\frac{\pi}{3}})$$

ligger i G .

(632) J genereras av $A_{\frac{\pi}{3}}$.

(*632) J genereras av $A_{\frac{\pi}{3}}$ och B_0 .

4.0.2 Vi visar att grupperna inte är isomorfa

För att visa att de grupper vi funnit är olika behöver vi visa att de inte är isomorfa. Från korollarium 3.2.2 vet vi att vi endast behöver jämföra grupper med isomorfa punktgrupper. Minns också att isomorfismer skickar translationer till translationer, rotationer till rotationer, reflektioner till reflektioner samt glidreflektioner till glidreflektioner. Vi kan se att vissa punktgrupper är cykliska med ordning n , vilket betecknas \mathbb{Z}_n . Några är av formen $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ och slutligen har vi dihedrala grupper av ordning n . Vi summerar resultatet i en tabell.

G	J	G	J
\circ	<i>trivial</i>	442	\mathbb{Z}_4
2222	\mathbb{Z}_2	*442	\mathbb{D}_4
**	\mathbb{Z}_2	4 * 2	\mathbb{D}_4
$\times \times$	\mathbb{Z}_2	333	\mathbb{Z}_3
*2222	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	*333	\mathbb{D}_3
22*	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	3 * 3	\mathbb{D}_3
22 \times	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	632	\mathbb{Z}_6
* \times	\mathbb{Z}_2	*632	\mathbb{D}_6
2 * 22	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		

Grupperna 2222, **, $\times \times$ och $* \times$ är alla olika

Av dessa är 2222 den enda som innehåller någon rotation så den kan inte vara isomorf med någon annan. Inte heller $\times \times$ är isomorf med någon eftersom den är den enda kvar som inte har någon reflektion. För elementen i ** gäller att om vi tar en godtycklig glidreflektion tillhörande ** så går den alltid att skriva som en produkt av en translation och reflektion som också ingår i **. Detta är inte fallet för glidreflektioner i $* \times$. Exempelvis kan vi se att glidreflektionen $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b - a), B_0)$ går att skriva som $(\frac{1}{2}a, I)(\frac{1}{2}(2b - a), B_0)$ vilket inte är två element i $* \times$, (jämför med allmänna formen för elementen i $* \times$ från tidigare). Därmed kan inte dessa två grupper vara isomorfa.

Grupperna *2222, 22*, 22 \times och 2 * 22 är alla olika

Av dessa är 22 \times den enda som inte har en reflektion så den kan inte vara isomorf med någon annan. Om samma jämförelse som ovan görs på de tre övriga kan man se att bara *2222 har glidreflektioner som består av produkten av element tillhörande gruppen. Slutligen kan vi se att 22* bara har reflektioner i horisontella speglar medan 2 * 22 har reflektion i både horisontella och vertikala speglar. Därmed kan ingen av dessa grupper vara isomorfa med någon annan.

Grupperna $*442$ och $4 * 2$ är olika

Varje rotation i $*442$ kan skrivas som en kombination av reflektioner tillhörande gruppen i fråga. Detta gäller inte rotationerna i $4 * 2$. Därmed kan inte dessa grupper vara isomorfa.

Grupperna $*333$ och $3 * 3$ är olika

Visas med samma metod som ovan.

Litteraturförteckning

- [1] M. A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] S. J. Axler. *Linear Algebra Done Right*, volume 2. Springer, 1997.
- [3] J. H. Conway, H. Burgiel, and C. Goodman-Strauss. *The Symmetries of Things*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.
- [4] H. Coxeter et al. *M.C. Escher, Art and Science: Proceedings of the International Congress on M.C. Escher*. Elsevier Science Publishing Company, New York, 1985.
- [5] C. Glader and M. Lindström. *Diskret Matematik*. <http://web.abo.fi/fak/mmf-/mate/kurser/algebrab/kapitel2nyast.pdf>, 2006. [Senast hämtad 2021].
- [6] M. Johnson and N. Rodriguez. *Wallpaper: The Mathematics of Art*. 2003.
- [7] R. O'Connor. *Maurits Cornelius Escher*. c, 2000. [Senast hämtad 2021].
- [8] F. Rønning. *Islamic Patterns and Symmetry Groups*. Sør-Trøndelag University College, 1995.
- [9] R. L. E. Schwarzenberger. *The 17 Plane Symmetry Groups*. *The Mathematical Gazette*, 58:123-131, 1974.