



FAKULTETSOMRÅDE FÖR  
NATURVETENSKAP OCH TEKNIK

AVHANDLING PRO GRADU

**Hur digitala verktyg kan användas i  
matematikundervisningen på ett pedagogiskt sätt  
– en litteraturstudie**

*Skribent:*

Jimmy FINNHOLM

*Handledare:*

Mikael LINDSTRÖM

2020

## Abstrakt

Tekniken har haft en snabb framfart under de senaste decennierna såväl i industrin, vardagslivet som i skolorna. Det finska skolsystemet har prisats i många olika sammanhang och antalet länder som studerat vårt skolsystem och lärt sig av oss, går inte att räkna på fingrarna. Likväl har vi ett skolsystem som inte riktigt hunnit med i den snabba förändring som den digitala tekniken gett upphov till i vårt samhälle, så en del problem har vuxit fram under processens gång. I denna avhandling pro gradu presenteras ett urplock av utmaningarna som har uppstått i samband med introduktionen av den nya generationens symbolhanterande räknare, men samtidigt belyses också möjligheterna som dessa räknare skapar.

Pro gradun är skriven i form av en *allmän litteraturstudie* där litteraturen som använts behandlar skolmiljöer jämförbara med den finska skolan, samt studier där resultaten är generaliserbara till finska skolförhållanden. Ämnet har avgränsats till att fokusera på användningen av Texas Instruments räknare samt programvara TI-Nspire CX CAS och i huvudsak till ämnesområdet algebra, även om också litteratur där digitala verktyg mera allmänt studerats samt studier där hela matematikämnet behandlats också finns med där de haft relevans. Gymnasieundervisningen är i fokus, men forskning gällande grundskolan har också varit till viss nytta.

Med den finländska studentexamen i åtanke har TI-Nspire varit av särskilt intresse i och med att räknarens mjukvara hör till programpaketet som numera är tillgänglig vid studentskrivningarna. Syftet med denna litteraturstudie är att se över vad forskningen säger om vad gymnasielärare bör tänka på vid implementering av TI-Nspire i undervisningen för att dels undvika att räknaren hamnar i primärt fokus medan matematiken blir sekundär, dels kunna utnyttja räknarens fulla potential.

Forskningsfrågorna som besvaras i arbetet är följande:

*Hur påverkar användningen av TI-Nspire förståelsen för algebraiska fenomen?*

*Vilka möjligheter erbjuder TI-Nspire till algebraundervisningen?*

*Vilka utmaningar skapas genom användning av TI-Nspire i algebraundervisningen?*

*Vilken är lärarens roll när TI-Nspire används i algebraundervisningen?*

I resultatet framkommer bland annat att lärarens roll är central när man bedömer hur användningen av TI-Nspire inverkar på studerandes förståelse av algebraiska fenomen.

Frågorna besvaras med TPACK-modellen som teoretiskt ramverk. Denna står för en helhet av teknik, pedagogik och matematik, vilket i resultatdelen visar sig vara något som lärare behöver ha en god nivå av för att undervisa studerande till framstående prestationer inom matematiken.

Nyckelord: *digitala verktyg, TI-Nspire, algebra, matematikundervisning, CAS*

# Förord

Det här pro gradu-arbetet har gjorts vid Fakulteten för naturvetenskaper och teknik vid Åbo Akademi. Pro gradu-avhandlingen lyfter fram några väsentliga frågor kring matematikundervisningen och den snabba digitaliseringen. Jag vill här passa på att tacka de i Åbo Akademis personal som trott på mig och gjort mina studier möjliga att genomföra i huvudsak på distans, Esse Elektro-Kraft Ab som gett mig möjlighet till flexibelt deltidsarbete under skrivandets gång samt mina vänner, familj och sambo som fått stå ut med att jag många gånger prioriterat studierna framom mera sociala aktiviteter.

Åbo, November 2020

Jimmy Finnholm

# Innehållsförteckning

1. Introduktion.....	1
1.1 Bakgrund .....	2
1.2 Studentexamen i matematik i Finland .....	3
1.3 Syfte.....	4
1.4 Målsättning.....	5
1.5 Avhandlingens disposition.....	5
2. Teoretisk bakgrund.....	7
2.1 Teoretiskt ramverk .....	7
2.2 Algebra .....	10
2.3 Tidigare forskning .....	11
2.3.1 Effekterna på studerandes utveckling av förståelse .....	11
2.3.2 Digitala verktyg - en litteraturstudie (1990–2006).....	13
2.3.3 Tidig algebra .....	14
2.3.4 Förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå.....	14
2.3.5 Digitala lärresurser i matematikundervisningen .....	16
3. Metod .....	17
3.1 Val av metod.....	17
3.2 Litteratursökning .....	17
3.3 Litteraturstudie.....	18
3.4 Tillförlitlighet, trovärdighet och etik .....	19
4. Tvärvetenskaplig relevans .....	20
5. Resultat.....	21
5.1 Hur <i>påverkar</i> användningen av TI-Nspire <i>förståelsen</i> för algebraiska fenomen?.....	21
5.2 Vilka <i>möjligheter</i> erbjuder TI-Nspire till algebraundervisningen? .....	22
5.3 Vilka <i>utmaningar</i> skapas genom användning av TI-Nspire i algebraundervisningen?.....	23
5.4 Vilken är <i>lärarens roll</i> när TI-Nspire används i algebraundervisningen?.....	24
6. Diskussion.....	26
6.1 Metoddiskussion .....	26
6.2 Resultatdiskussion .....	27
6.3 Förslag på vidare forskning .....	29
Litteraturförteckning .....	30

# 1. Introduktion

Under 2000-talet har den tekniska utvecklingen varit explosionsartad och nya tekniker tas i bruk runtom i vårt samhälle i snabb takt. Samtidigt som samhället utvecklas behöver också våra skolor tänka om kring vad som undervisas samt med vilka metoder för att förbereda dagens unga för arbetslivet. För skolan att hänga med i samhällsutvecklingen är inte alltid så enkelt och inför nya reformer för snabbt är risken stor att inte tillräckligt många faktorer tagits i beaktande.

En enkel jämförelse mellan grunderna för grundskolans läroplaner 2004 och 2014 visar att ordet *digital* i någon form finns omnämnt fyra gånger i läroplanen 2004, medan i läroplanen från 2014 finns ordet *digital* hela 162 gånger och *digitala verktyg* i 114 av dessa fall (Utbildningsstyrelsen, 2004) (Utbildningsstyrelsen, 2014). Införandet av digitala verktyg i grundskolans läroplan är alltså ett relativt nytt fenomen i och med att läroplanen för klasserna 7–9 trädde i kraft stegvist med början under hösten 2016.

I gymnasiets läroplan 2003 nämns ordet *digital* sex gånger, medan läroplanen 2015 nämner ordet 81 gånger och läroplanen 2019 40 gånger (Utbildningsstyrelsen, 2003) (Utbildningsstyrelsen, 2015). Man kan ana sig till att under perioden 2003–2015 har det utvecklats många digitala verktyg som möjliggör nya undervisningsmetoder, medan det i läroplanen 2019 anses vara en självklarhet att digitala verktyg ska användas i undervisningen eftersom samtliga studentprov skrivs digitalt (Utbildningsstyrelsen, 2019).

Under 2000-talet har det utvecklats många nya digitala verktyg som kan tillämpas i matematikundervisningen i många olika former. För att lyfta fram några exempel finns grafitande och symbolhanterande räknare såsom Texas Instruments TI-Nspire CX CAS, vars programvara också kan installeras på dator (Texas Instruments, 2020) och numera är en integrerad del av de digitaliserade studentskrivningarna i matematik, Geogebra som är ett gratis program, vilket kan laddas ner på dator eller användas direkt i webbläsaren (Geogebra, 2020) samt WolframAlpha, ett webbaserat verktyg, som utnyttjar en online-version av det avancerade matematikprogrammet Mathematica. (WolframAlpha, 2020)

Med allt detta i åtanke finns det goda skäl att tänka igenom hur matematikundervisningen i dagens samhälle ska se ut och på vilket sätt vi använder oss av de kraftfulla digitala hjälpmedel som finns tillgängliga, utan att för den delen låta tekniken ta över huvudfokuset i skolorna.

## 1.1 Bakgrund

I och med att studentexamensprovet i matematik skrivs med hjälp av dator från och med hösten 2019 leder det också till ett påskyndat införande av digitala verktyg i matematikundervisningen, speciellt på gymnasienivå. Eftersom lärokurserna i stort sett innehåller samma stoff som tidigare finns det inte särskilt mycket tid över för att undervisa användningen av de digitala verktyg som studerande bör behärska. För att gymnasiestudierna ska flyta på skapligt vore det önskvärt att de studerande har med sig en god grundkunskap i användning av digitala verktyg kopplade till matematikämnet redan från högstadiet.

Den snabba förändringen innebär att bokförlagen inte hinner utveckla heltäckande och ändamålsenlig kurslitteratur, vilket för gymnasielärarna innebär att var och en tvingas skapa eget material och egna anpassningar av olika teman i brist på färdigt material. Detta leder till att det finns en överhängande risk att en del av undervisningsmaterialet som digitaliserats för digitaliserandets skull, saknar pedagogisk karaktär och därmed eventuellt används på bekostnad av förståelse av olika fenomen och räkneoperationer. Visserligen finns här också en fördel i att lärarna skapar sitt eget material - istället för att passivt recitera ett färdigt läromedel blir lärarna en medförfattare till det material som undervisas (Brusilovsky, Knapp, & Gamper, 2006). Den aktiva involveringen förändrar lärares syn på tekniska verktyg från att de tidigare ofta ha setts som en utmanare och ibland rentav som en fiende, till att övergå till att ses som en vän (Lyublinskaya & Tournaki, 2011).

Att undervisa med hjälp av teknik är utmanande av flera olika orsaker. Medan traditionella tekniker såsom pennor, svarta tavlan och mikroskop har en specifik och stabil funktionalitet, går utvecklingen av den digitala tekniken (tex. datorer, mjukvaruapplikationer, handhållna räknare) så snabbt framåt att funktionaliteten och användningsområden för verktygen ändras - något som bidrar med ytterligare utmaningar vid användningen i undervisningssituationer. En tydlig skillnad kan också ses i möjligheten att tyda sig till funktionaliteterna av verktygen där man exempelvis kan se hur en penna fungerar, medan en symbolhanterande räknare döljer underliggande funktionalitet på ett abstraktare plan. Ytterligare en utmaning vid användning av digital teknik ligger i att inse *hur* och *när* man använder vilken typ av digitala hjälpmedel, eftersom digitala verktyg är olika bra lämpade för olika aktiviteter. (Koehler & Mishra, 2009)

Till följd av Finlands resultat i PISA-undersökningarna, där vi under en längre tid presterat generellt sämre inom området algebra än inom de andra grenarna (Yang Hansen, o.a., 2014), blir valet att avgränsa materialet till algebra naturligt eftersom det där finns mycket att förbättra och utveckla.

Algebra är bra för strukturellt tänkande, inte bara inom matematiken. Finland samt de övriga nordiska länderna presterar svagare i just det algebraiska området jämfört med andra delområden inom matematiken. Förklaringen till detta är säkerligen mångfasetterad, men en större delorsak kan ligga i att algebra i sin helhet nästan inte alls berörs under lågstadiet, och sedan explosionsartat tar fart i högstadiet och går direkt till väldigt abstrakt nivå utan att eleverna besitter en tillräcklig grundförståelse. Jämförelsevis presterar Estland relativt starkare gällande algebra och där introduceras så tidigt som under andra klass material som kan klassificeras som algebra (Hemmi, Lepik, Madej, Bråting, & Smedlund, 2019).

## 1.2 Studentexamen i matematik i Finland

Från och med hösten 2019 skrivs studentskrivningarna i Finland digitalt i alla ämnen i och med att matematiken som sista ämne digitaliserades. Studentexamensprovet i matematik är numera uppdelat i tre delar varav den första – A-delen - innehåller fyra uppgifter varav samtliga besvaras. A-delen ska besvaras och lämnas in innan man får tillgång till de i övrigt tillåtna digitala hjälpmedel som listas nedan. Den andra delen - B1 - innehåller fem uppgifter varav tre besvaras medan den tredje delen - B2 - innehåller fyra uppgifter varav tre besvaras. Totalt besvaras alltså tio uppgifter á 12 poäng, vilket ger en maxpoäng på 120 poäng. (Studentexamensnämnden, 2019)

Under studentskrivningarna i matematik har man tillgång till följande matematikrelaterade digitala hjälpmedel och verktyg:

*Under hela provet*

- GNOME
- KCalc
- SpeedCrunch

### *Under B-delarna*

- LibreOffice Calc
- wxMaxima
- Texas Instruments TI-Nspire CAS
- Casio ClassPad Manager
- Logger Pro
- Geogebra
- 4f häfte

(Studentexamensnämnden, 2019)

**TI-Nspire CAS** som nämndes redan i introduktionskapitlet är en symbolhanterande räknare från Texas Instruments som finns dels i formen av en handhållen enhet, men likaså i mjukvaruform till datorn (Texas Instruments, 2020). I den senare formen ingår den alltså i den digitala miljö där studentskrivningarna numera äger rum. I och med detta kommer arbetet gå särskilt nära användningen av detta specifika digitala verktyg.

Innehåll och funktionalitet hos övriga verktyg är för detta arbete av mindre betydelse, varför de inte presenteras närmare. Anmärkningsvärt är att notera hur många digitala hjälpmedel som finns att tillgå under skrivningarna och hur studerandes teknikvana får stor vikt. Vissa studerande rentav avstår från matematiken i studentexamen då de upplever att de inte behärskar de matematiska verktyg som behövs (YLE, 2018).

### 1.3 Syfte

I samband med att användning av de digitala hjälpmedlen kraftigt ökat i gymnasiernas matematikundervisning höjs kraven på såväl lärarens som elevernas digitala kompetenser. Samtidigt som digitala hjälpmedel blir vardag i matematikundervisningen och bland annat CAS-räknare (Computer Algebra System) används för att lösa mera krävande räkneoperationer uppstår en utmaning i form av att hitta en balans mellan användning av tekniska verktyg och förståelse av själva räkneoperationen.

Syftet med detta arbete är att se över vad forskningen säger om hur man kan integrera användningen av digitala verktyg som hjälpmedel i undervisningen, avgränsat till användningen av Texas Instruments symbolhanterande räknare TI-Nspire. Tanken är att belysa sådant som lärare bör ta i beaktande i undervisningsplaneringen för att dels undvika



fallgröpar där matematikämnet blir av sekundär karaktär och det digitala verktyget tar över fokus, dels på vilket sätt användningen av digitala hjälpmedel kan ge en djupare förståelse i ämnet och effektivera räknandet.

Följande forskningsfrågor formar arbetet:

1. Hur *påverkar* användningen av TI-Nspire *förståelsen* för algebraiska fenomen?
2. Vilka *möjligheter* erbjuder TI-Nspire till algebraundervisningen?
3. Vilka *utmaningar* skapas genom användning av TI-Nspire i algebraundervisningen?
4. Vilken är *lärarens roll* när TI-Nspire används i algebraundervisningen?

Forskningsfrågorna överlappar varandra till viss del, men belyser olika sidor av samma fenomen - något som kan ge en bättre helhetsuppfattning jämfört om frågorna är helt fristående från varandra.

#### 1.4 Målsättning

Målsättningen med arbetet är att kartlägga vilka faktorer som påverkar förståelsen samt lärandet inom området algebra när digitala hjälpmedel används i undervisningen. Arbetet ska förhoppningsvis skapa en överblicksbild av vad en lärare på gymnasiet i Finland bör ta i beaktande när hen planerar och genomför sin undervisning där digitala verktyg är en integrerad del.

#### 1.5 Avhandlingens disposition

I första kapitlet presenteras också det finländska studentexamensprovet i matematik, vilket fungerar som slutprov i de finländska gymnasierna och som numera skrivs helt digitalt och inkluderar en rad digitala hjälpmedel som skribenterna förväntas kunna hantera och tillämpa självständigt i provet. Detta faktum leder sedan naturligt fram till att syftet presenteras - att gymnasielärarna behöver fundera på hur undervisningen sätts upp för att de studerande ska vara förberedda då dagen för studentskrivningarna kommer, såväl gällande ämneskunskap som tekniken.

Andra kapitlet stakar ut den teoretiska grund som arbetet bygger på samt tidigare relaterade forskning som detta arbete stöder sig på. Det teoretiska ramverket som forskningsresultaten speglas mot är TPACK-modellen, vilken omfattar både teknisk, pedagogisk och ämneskunskap.

Under arbetets tredje kapitel beskrivs metoden som använts samt mera i detalj hur sökningen gått till och hur den använda litteraturen har valts ut från en större mängd sökresultat, på vilka grunder vissa artiklar ratats och andra har använts. Också etik samt arbetets trovärdighet diskuteras kort i detta kapitel.

Fjärde kapitlet sätter in arbetet i ett större sammanhang och påvisar vilka andra områden man kan dra paralleller till samt vilka områden som kan tänkas gå genom en liknande transformation parallellt med matematikundervisningen. Likaså betonas att matematiken inte står ensam, att en grund inom matematiken inte enbart förbereder för högre studier inom just matematiken, utan tillämpas inom en rad olika närbesläktade ämnesområden.

Kapitel fem står för resultatet i detta arbete och belyser då den befintliga forskningen i ljuset av forskningsfrågorna och med det teoretiska ramverket TPACK som referenspunkt.

Sjätte kapitlet är till för diskussion kring såväl metoden som använts i arbetet, tillvägagångssätt och resonemang kring hur saker kunde gjorts annorlunda som vad man kan vänta sig skulle sett annorlunda ut, dvs. resonemang kring vad som skulle kunnat bli. Angående resultatet diskuteras infallsvinkeln i arbetet, om valet av teoretiskt ramverk påverkade resultatet eller om resultatet skulle sett lika ut oavsett. Som avslutning föreslås vidare forskning på området och förbättringar som kunde göras till en motsvarande studie.

## 2. Teoretisk bakgrund

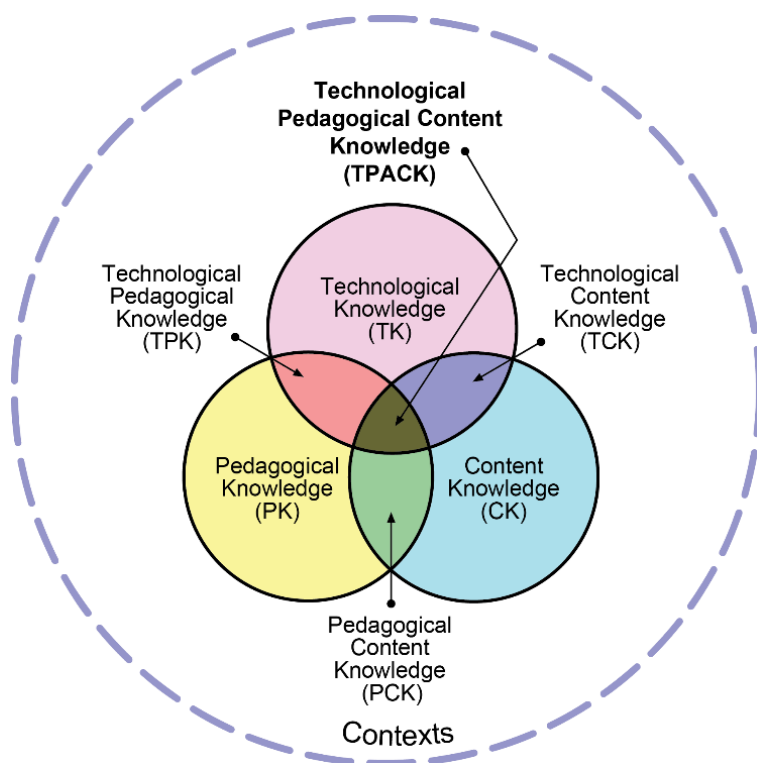
I detta kapitel beskrivs de teoretiska ramar inom vilka arbetet tar sin form och det avgränsade ämnesområdet algebra specificeras. Kapitlet avslutas med att beskriva tidigare forskning och relevanta studier gjorda i anslutning till arbetets tema.

### 2.1 Teoretiskt ramverk

I och med att detta arbete till stor del handlar om teknik i undervisning kommer resultaten speglas mot den så kallade TPACK-modellen som belyser komplexiteten det moderna läraryrket omfattar då det inte längre räcker med en kombination av ämneskunskap och pedagogisk kunskap, utan yrket numera också kräver en växande del teknisk kunskap.

TPACK-modellen är ett teoretiskt ramverk, vars idéer är så pass allmängiltiga att man inte direkt kan benämna någon som grundare, men däremot kan termen TPACK och modellens utvecklande till den form vi idag känner den härledas till de amerikanska forskarna Punya Mishra och Matthew Koehler.

TPACK är en förkortning av Technological Pedagogical and Content Knowledge och är en modell som illustrerar hur lärare behöver kunna kombinera de tre grundpelarna; teknik, pedagogik och innehåll på ett ändamålsenligt sätt. Nedan åskådliggörs modellen illustrativt i ett Venndiagram där TPACK återfinns i de tre områdenas gemensamma skärningssnitt.



figur 1. Kärnkompetensernas förhållande illustrerat i ett Venndiagram. Källa: tpack.org

Modellens utgångspunkt ligger i att undervisning är av komplex natur och därmed kräver många kompetenser, speciellt ändamålsenlig undervisning med hjälp av digital teknik. De tre grundkunskaperna bör enligt modellen inte ses enskilt, utan i kombination med varandra och totalt kan i figur 1 ses sju olika områden som nedan beskrivs kort.

#### Ämneskunskap (Content Knowledge - CK)

Syftar på lärarens kunskap i ämnet som undervisas. Ämneskunskap varierar mellan ämnen och kan inte överföras från ett ämnesområde till ett annat. Denna kunskap omfattar kunskap om begrepp, teorier, idéer, kunskap om bevisföring samt etablerade tillvägagångssätt inom ämnesområdet i fråga (Shulman, 1986). Kunskap om hur man utvecklar dessa områden hör också till ämneskunskapen. (Koehler & Mishra, 2009)

#### Pedagogisk kunskap (Pedagogical Knowledge - PK)

Innefattar lärarens kunskaper kring undervisningsprocessen och hur olika metoder kan användas för undervisning samt hur det påverkar lärandet. Denna kunskapsform omfattar också kunskap kring lektionsplanering, allmän hantering av klassrumssituationer samt strategier för uppgiftsbedömning. (Koehler & Mishra, 2009)

### *Kunskap om digital teknik (Technological Knowledge - TK)*

Sammanfattar kunskaper kring de sätt man kan jobba med och tänka på teknik och digitala verktyg. Detta inkluderar också en tillräckligt bred förståelse av informationsteknik för att ändamålsenligt tillämpa den i såväl arbete som vardagssituationer, samt kontinuerligt hålla sig uppdaterad inom området. (Koehler & Mishra, 2009)

### *Pedagogisk ämneskunskap (Pedagogical Content Knowledge - PCK)*

Liksom namnet säger blir det en blandning av PK och CK, dvs. förmågan att anpassa ämneskunskapen på ett pedagogiskt sätt. PCK är något av en föregångare till TPACK som Shulman (1986) grundat som teoretisk modell för undervisning innan tekniken ännu blivit en del av skolvärlden. PCK handlar i stor utsträckning om förmåga att representera ämnesinnehållet på flera olika sätt och möta studerande på deras individuella kunskapsnivå, dvs. differentiering. Denna kunskap räknar också in kännedom om vanliga stötestenar i kursmaterialet och förmågan att hjälpa studerande förbi dessa väntade hinder innan problemet ens uppstår. Flexibilitet och förmåga att använda alternativa undervisningsmetoder när det behövs kan också räknas in till denna kunskapsklass. (Koehler & Mishra, 2009)

### *Teknisk ämneskunskap (Technological Content Knowledge - TCK)*

TCK handlar om förståelsen av hur ämnesinnehåll och teknik samverkar och på vilket sätt de kan stöda eller begränsa varandra. För lärare gäller det alltså att utöver ämneskunskapen också besitta en djupgående förståelse kring teknikens roll i undervisningssituationer så att inte ämnesinnehållet blir sekundärt till förmån för de tekniska hjälpmedlen. Det handlar också om att förstå vilka tekniker som kan användas för hurdana ändamål samt att inse hur ämnesinnehållet eventuellt påverkar förståelsen av tekniken och hur tekniken påverkar förståelsen av ämnesinnehållet. (Koehler & Mishra, 2009)

### *Teknisk pedagogisk kunskap (Technological Pedagogical Knowledge - TPK)*

TPK syftar på förståelsen för hur undervisning och lärande kan förändras vid användningen av särskilda tekniska hjälpmedel. Eftersom stor del av mjukvarorna på marknaden är skapta för annat än undervisning (ofta företagsanvändning) är det för lärare en central kunskap att kunna tillämpa den befintliga tekniken på ett pedagogiskt sätt och se förbi de primäregenskaper mjukvarorna kan ha och istället anpassa till eget ändamål. (Koehler & Mishra, 2009)

*Teknisk pedagogisk ämneskunskap* (Technological Pedagogical Content Knowledge - TPACK)

TPACK som symboliseras av det gemensamma området för alla tre hörnstenar i Venn diagrammet i *figur 1* är annorlunda än kunskap om de övriga koncepten tagna skilt för sig, det handlar om en helhetsförståelse om hur man effektivt kan använda sig av digitala verktyg för att tydligt kunna åskådliggöra ämnesbegrepp och representationer på ett pedagogiskt sätt. För att lyckas med detta behövs också kunskap om vad som gör begrepp svåra att lära sig och vilka tekniska hjälpmedel som kan underlätta och förtydliga ämneskunskapen. Ytterligare behövs en kunskap om studerandes förkunskaper för att kunna möta dem på deras egen nivå med lämpliga tekniska verktyg och således utveckla ny kunskap eller stärka gammal. (Koehler & Mishra, 2009)

Utöver att TPACK används som modell har Lyublinskaya och Tournaki (2011) utvecklat ett verktyg för att göra en bedömning av en lärares TPACK nivå på en skala mellan 0 och 5. Verktöget byggs på ett frågebatteri där de gjort en bred kartläggning av vilka egenskaper som påverkar TPACK nivån. Resultatnivån fås baserat på ett genomsnitt av de enskilda egenskaperna i frågebatteriet.

## 2.2 Algebra

Algebra är ett brett område inom matematiken, men i denna avhandling avgränsas ordets mening till manipulering av matematiska symboler. Algebran fyller en funktion i ett större sammanhang då den fungerar som en väg till tänkande på en högre och mera generell nivå och stärker andra matematikområde (Vygotkij, 1999). Algebra är samtidigt ett användbart och kraftfullt verktyg för att lösa mera omfattande och avancerade uppgifter också inom andra ämnesområden än matematik, exempelvis naturvetenskaper och ekonomi (Persson, 2008).

Vad gäller att komma till förståelse kring algebra finns det många vägar, här listas de fyra vägar till algebraförståelse som Bednarz, Kieran & Lee listat:

- *Generaliseringsvägen*: Algebra är en vidare generalisering av aritmetiken. Såväl mönster som regelbundenheter kan beskrivas med algebraiska mallar.
- *Problemlösningsvägen*: Komplicerade problem löses med hjälp av algebra - när aritmetiken inte räcker till tar algebran vid.

- *Modelleringsvägen*: Med hjälp av tillämpningar av algebraiska regler kan bland annat förutsägelser av utfall göras kring modeller av verkliga eller simulerade situationer.
- *Funktionsvägen*: Eftersom algebra (delvis) handlar om förhållande mellan variabler kan funktioner undersökas med hjälp av algebraiska regler. Vidare kan nämnas att denna väg hjälper vidare till förståelsen inom den matematiska analysen. (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996)

När det kommer till lärande av algebra finns det enligt Persson fem huvudfaktorer som spelar in:

- Förkunskaper
- Begreppsutveckling
- Undervisning
- Tid för lärande
- Intresse, attityder och känslor

(Persson, 2010)

## 2.3 Tidigare forskning

Här presenteras en del relevanta studier som tidigare gjorts kring arbetets tema. Dessa används som centrala artiklar i besvarandet av forskningsfrågorna. En äldre litteraturstudie på området presenteras som något av en referensstudie. Valet av avgränsning till algebraområdet och dess relevans som utvecklingsområde i Finland belyses med studien om tidig algebra.

### 2.3.1 Effekterna på studerandes utveckling av förståelse

Persson (2011) genomförde en kvalitativ studie i åtta olika svenska skolklasser kring hur tekniska hjälpmedel, i huvudsak TI-Nspire CAS, används inom matematiken. Han fokuserade dels på hur verktygen används av lärarna dels hur det påverkar de studerande. Semi-strukturerade intervjuer med samtliga lärare och två elever per deltagande klass gjordes för insamlande av data. Utöver intervjuerna gjordes klassrumsobservationer, undervisningsexperiment, samt lärarenkäter för lärarna och elevenkäter för samtliga elever.

Förväntningen inför studien var att hitta några gemensamma nämnare mellan lärare och studerande på de olika skolorna för att kunna få en första inblick i hur tekniken påverkar undervisningen samt förståelsen. Studien pågick under en hel termin med grupper som läste matematik A eller B, dvs. de två första kurserna på svenska gymnasier.

Studien visar på tydliga samband i upplevelse hos såväl lärare som studerande på de deltagande skolorna. Nästan alla studerande påvisade signifikanta framsteg gällande ändamålsenlig användning av tekniska verktyg vid arbete med matematikuppgifter samtidigt som samtliga lärare uppvisat klara framsteg när det kommer till att integrera tekniska verktyg i en högkvalitativ lärandemiljö. En klar majoritet av de studerande upplevde att de tekniska verktygen gav upphov till en positiv effekt gällande synen på vad matematiska aktiviteter handlar om; likaså gynnades i stor utsträckning intresset för matematikämnet och gav många ett starkare självförtroende gällande matematiken.

Det kanske viktigaste resultatet i studien handlar om detta arbetes kärnfrågor, nämligen hur TI-Nspire mjukvara i datorer eller i handhållna enheter kan användas i framförallt matematikundervisningen på gymnasienivå. Persson kan konstatera att det finns enorm potential i integreringen av teknik i matematikundervisningen tack vare, bland annat, tydlig och snabb grafisk framställning av uppgifter. Men lärarna i studien vittnar också om utmaningar som uppstår med användningen av tekniska verktyg i matematikundervisningen, speciellt för lågpresterande studerande som kan uppleva att ännu ett område att bemästra blir överväldigande.

Samtliga lärare i studien vittnar om att TI-Nspire underlättar för studerande att illustrera matematiska objekt och granska dem noggrant. Sex av de åtta lärarna säger att digitala verktyg ger flera möjligheter inom problemlösning och att studerande klarar av uppgifter av högre svårighetsgrad tack vare dem. Däremot var det endast tre av åtta lärare som var av åsikten att implementeringen av TI-Nspire skulle bygga en djupare matematisk förståelse, något som flera lärare förklarar med att djupare förståelse också kräver mekaniskt arbete med penna och papper. De menar då att man kan undersöka och utforska med hjälp av räknaren, men en djupare förståelse kräver att man lyfter ut problemet ur räknaren. En annan risk som lyfts fram är den att inte alla studerande dokumenterar lösningarna, vilket rentav kan leda till en försämrad förståelse. Dessutom försvårar avsaknaden av dokumentation lärarens möjligheter att följa upp att alla får den kunskap de behöver.

Persson granskar också över ifall kombinationen av den handhållna TI-Nspire enheten och mjukvaran på dator kan vara bättre än att välja endera. I studien framkommer att det finns



en viss nytta av att kombinera dessa eftersom den handhållna enheten är snabbare att använda för korta beräkningar och testning, medan mjukvaran på dator erbjuder större skärm för tydligare grafframställning och lösning av större problem samt bättre möjligheter för dokumentering. Således konstaterar Persson att man noggrant bör tänka genom på vilket sätt ny teknik implementeras i undervisningen så att användningen blir ändamålsenlig. (Persson, 2011)

### 2.3.2 Digitala verktyg - en litteraturstudie (1990–2006)

Reznichenko (2007) har gjort en studie på hur lärande av matematik påverkas genom användning av grafisk kalkylator, dvs. en enklare version av TI-Nspire som annars är i fokus i denna avhandling. Reznichenko har sammanställt forskning från åren 1990–2006 då de grafiska verktygen har tagit sina första steg in i skolundervisningen, så denna avhandling kan alltså ses som en nyare version av hennes litteraturstudie. Av just den orsaken kan Reznichenkos studie vara av intresse som referens och för att se hur utvecklingen fortsatt efter 2006.

Studiens två huvudfokus är:

1. Att kartlägga användningen av dator och kalkylator som digitala verktyg i matematikundervisningen
2. Att analysera deras effekt på studerandes prestationer inom områdena algebra och analys

En allmän rädsla för att digitala verktyg tas in i matematiken på bekostnad av konceptuell förståelse kan lugnas med litteraturstudiens resultat då flertalet studier påvisar att de digitala verktygen förstärker förståelsen av bland annat kopplingen mellan olika representationsformer av uttryck, medan inga andra områden verkar försvagas av integreringen av digitala verktyg.

I studien konstateras sammanfattningsvis att digitala verktyg såsom kalkylator och dator skapar möjligheter till meningsfulla aktiviteter som sätter studerande i den centrala, aktiva rollen medan läraren får en mera handledande roll. Också när det kommer till problemlösning bemöter studerande själva uppgifterna mera fokuserade på själva problemställningen när man eliminerar den numeriska och algebraiska beräkningen.

Avslutningsvis påstår Reznichenko att hon med sin litteraturstudie visar att studerande på gymnasie- och universitetsnivå lär sig matematik (med betoning på analys och algebra) mer djupgående med hjälp av digitala verktyg. Viktiga begrepp såsom funktioner, modellering och problemlösning förstås bättre när digitala verktyg används. (Reznichenko, 2007)

### 2.3.3 Tidig algebra

I en färsk studie (Hemmi, Lepik, Madej, Bråting, & Smedlund, 2019) där man jämför Finland, Sverige och Estland som har relativt lika skolsystem kan man konstatera att gällande *hur* och *när* algebra introduceras i de olika ländernas läroplaner skiljer sig överraskande mycket. Resultaten från PISA-undersökningarna under 2000-talet visar att algebra är ett svagt ämnesområde relativt till de övriga matematiska områden såväl för Finland som Sverige, medan Estland är relativt sett starka inom algebran. (Yang Hansen, o.a., 2014)

Det är inte särskilt otänkbart att en delorsak till att just algebran är relativt sett svagare som ämnesområde har sin grund i de tidiga skolårens läroplan, för som (Hemmi, Bråting, & Lepik, 2020) konstaterar i sin jämförelsestudie så introduceras algebra klart tidigare och i en mera abstrakt form i Estland jämfört med såväl Finland som Sverige. I Finland framträder däremot algebran tydligt först på högstadiet och inom en kort tidsperiod från år 7 till år 9 går man från att inte veta vad en obekant är till att lösa ekvationer med en okänd variabel för att därefter lösa ekvationssystem med två variabler.

### 2.3.4 Förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå

Persson har genomfört en omfattande longitudinell studie a gymnasieskolor i Sverige där han undersökt en rad frågor kring hur man inom algebraområdet kan förbättra kvaliteten på undervisningen. Studien är genomförd genom tre delstudier med lite olika vinklingar:

1. Den första delstudien, "*The teacher as researcher: Teaching and learning algebra*", innehåller egentligen inga direkta undersökningar, utan blir mera en reflekterande artikel där Persson sätter teoretiska resultat från studier i relation till egen undervisning, samt behandlar olika infallsvinklar på förhållandet mellan rollen som lärare och rollen som forskare samt vilka för- och nackdelar som finns i kombinationen av yrkesrollerna.

2. Andra delstudien, "*Understanding relations between variables: Revisiting a 'node' in the development of algebraic thinking*", är en slags fördjupning av Perssons egen licentiatavhandling och fokuserar på en djupare analys av elevsvar i enkät- och intervjufrågor. Analysen av elevsvaren behandlas i denna delstudie i relation till tidigare forskning och det presenteras möjliga vägar till en förbättrad algebraundervisning.
  
3. "*Handheld calculators as tools for students' learning of algebra*" är den tredje delstudien, som för denna pro gradu avhandling är mest relevant i och med att den fokuserar på räknarens roll i matematikundervisningen, och då närmast gällande förståelsen av algebra. Diskussionen kring huruvida avancerade räknare hjälper eller stjälper har pågått under flera årtionden och behandlats med fokus på flera olika åldersgrupper. Exempelvis från universitetshåll har man lagt skulden på räknarna för att de studerande kommer med allt svagare förkunskaper till universiteten (Thunberg & Lingefjärd, 2006). Till följd av denna debatt har Persson granskat forskningens nuvarande ståndpunkter gällande räknarnas roll, när det kommer till studerandes problemlösningsfärdigheter, manipulativa färdigheter, begreppsforeställningar. Han har också undersökt om lärare och studerandes syn på räknarens roll i undervisningen påverkar resultatet. Hur väl tekniska hjälpmedel fungerar i undervisningen avgörs väldigt långt av hur lärare och elever ser matematikämnet och vad det innehåller, dvs. om räknare och andra digitala verktyg ses som en del av undervisningen eller något överflödigt och inkräktande. (Persson, 2010)

En genomgående trend i utveckling kunde ses mellan den grupp som jobbat med TI-Nspire räknare och kontrollgruppen som använt sig av en icke-symbolhanterande, men nog grafritande räknare. Den grupp som jobbat med TI-Nspire har som grupp, enligt Persson, presterat betydligt bättre inom alla områden än kontrollgruppen. Ett antal undantag förekommer helt naturligt, men också de fallen kan förklaras av andra yttre faktorer. Också en indikation på att "svaga" studerande, dvs. lågpresterare inom matematiken, skulle gynnas mera än andra framkommer, men kan inte till följd av en för liten datamängd bekräftas eller generaliseras. Dock finns det andra studier som stöder indikationen att de svagaste är de som gynnas mest av pedagogiskt tillämpade digitala verktyg, tex. (Yerushalmy, 2006).

### 2.3.5 Digitala lärresurser i matematikundervisningen

Skolforskningsinstitutet (2018) i Sverige har sammanställt en rapport baserat på 75 vetenskapliga studier som berör ett innehåll som är relevant för den svenska skolans matematikundervisning. Rapporten besvarar primärt följande två huvudfrågor:

1. Vilka effekter har matematikundervisning med digitala lärresurser på elevers matematikkunskap?
2. Vilka faktorer förklarar om matematikundervisning med digitala lärresurser har effekt på matematikkunskapen hos elever eller inte?

Digitala lärresurser kan enligt rapporten konstrueras på sådant sätt att de gynnar utvecklingen av en rad matematiska förmågor, särskilt i samband med en i övrigt varierad undervisningsmiljö. Dock kan man inte garantera att lika effektiv undervisning inte skulle vara möjlig att utforma utan digitala lärresurser. Däremot står det mer eller mindre klart att ett gynnsamt arbetssätt när det kommer till implementering av digitala verktyg i undervisning innebär att ämnesinnehållet hålls smalt avgränsat och samtidigt kopplas ihop med tröskelbegrepp för en djupare helhetsförståelse. Med tröskelbegrepp avses här matematiska begrepp, utan vilka fortsatt utveckling inom ett område inte kan ske.

En annan faktor som enligt rapporten verkar ha en uppenbar gynnsam effekt är en rik variation i undervisningen. Om digitala verktyg kan bidra till en bredare och mera mångsidig undervisning så gynnas också lärandet.

I rapporten framkommer också vikten av lärarens arbete för att digitala lärresurser ska ge positiv utveckling hos eleverna. Tekniskt komplexa digitala lärresurser kräver mycket tid och ett stort engagemang av läraren och kräver ofta en möjlighet för läraren att utbilda sig i hur lärresursen fungerar och hur undervisningen kan stödas av den. Ifall en sådan lärresurs tas in i undervisningen utan att läraren utbildats tillräckligt ger den digitala lärresursen inte nödvändigtvis längre någon positiv effekt på lärandet.

(Skolforskningsinstitutet, 2018)

### 3. Metod

I metodkapitlet beskrivs arbetets tillvägagångssätt samt valet av metod. Vidare presenteras på vilka grunder litteratursökningens resultat har gallrats ur för att lämna med relevant material och utesluta för arbetet irrelevant litteratur.

#### 3.1 Val av metod

Eftersom användningen av CAS-räknare under 2010-talet ökat markant och blivit standardutrustning i studentexamen finns det goda skäl att sammanfatta vad forskningen hittills säger om hur de kan användas i matematikundervisningen. Därav blev litteraturstudie en lämplig metod för avhandlingen.

Analysmetoden som används på resultatet är innehållsanalys och strävar till att spegla resultatet mot TPACK-modellen eftersom arbetets kärnfrågor handlar om just hur de tre hörnstenarna i TPACK-modellen bäst sammanfogas till en bra helhet.

#### 3.2 Litteratursökning

För att finna lämplig litteratur för arbetet har två databaser i huvudsak kommit i fråga, först och främst Finna, som är en databas via vilken man kommer åt material från Finlands museer, bibliotek och arkiv, samt bläddra bland och läsa material som finns på nätet (Finna, 2020). Den andra databasen som har använts är Google Scholar där ytterligare fem bibliotekslänkar satts till för flera relevanta sökträffar, nämligen följande: *Open WorldCat - Bibliotekssökning*, *Åbo Akademi University Library - ÅAU Fulltext*, *Novia University of Applied Sciences - Novia Fulltext*, *University of Vaasa - Fulltext - Univ. Vaasa* samt *VAASA UNIVERSITY - ProQuest Fulltext*.

Eftersom arbetet byggs upp kring den teoretiska modellen TPACK har också kriterierna för litteraturen begränsats till att vara relevant för att kunna återspeglas i modellen, dvs. på något sätt knyta ihop de tre hörnstenarna i modellen; teknik, pedagogik och undervisningsämne (matematik). För att inte göra ämnet för brett har ytterligare en

avgränsning i ämnet gjorts till området algebra, som har tillräcklig mängd relevant forskning tillgänglig, såväl i nordiska förhållanden, som ute i världen.

I huvudsak har sökningen varit inriktad på material från 2000-talet eftersom man tidigare inte haft särskilt mycket digitala verktyg att tillgå, men angående vissa områden, såsom pedagogik har också äldre litteratur ansetts relevant.

Mest relevant material har konstaterats vara sådana studier som gjorts inom Norden, speciellt Finland och Sverige, eftersom skolsystemen och kulturen ser relativt lika ut, men till följd av få relevanta artiklar har också bland annat amerikanska artiklar ansetts som relevanta, men då hanterats med kritiska ögon att beakta från vårt nordiska skolsystem.

Utöver materialet som sökningarna gett, har också en del litteratur hittats via referenser i litteraturen som kommit fram via sökningarna.

Alla litteratursökningar har gjorts under våren och sommaren 2020 och litteraturen som använts är huvudsakligen i elektronisk form.

### 3.3 Litteraturstudie

Metoden med vilken arbetet har skapats kallas litteraturstudie, vilket kan delas in i två kategorier:

#### 1. *Allmän litteraturstudie*

Ska ge en bred förståelse samt helhetsöverblick över ämnet och är inte lika stramt reglerad i utformning som den systematiska litteraturstudien är. I sökningen efter litteratur kan man här klicka sig vidare från en artikel till följande. (Pedersen & Reidunsdatter, 2018)

#### 2. *Systematisk litteraturstudie*

Bör som namnet säger, vara systematiskt uppbyggd och tydligt beskriven för lätt reproducerbarhet. En systematisk litteraturstudie är mera noggrann och bör eftersträva en hög specificitet, dvs. lyckas beskriva sökningen och valen av samtliga referenser, samt utesluta icke-relevanta. (Pedersen & Reidunsdatter, 2018)

Denna pro gradu avhandling följer strukturen för allmän litteratursökning, men med vissa inslag från den systematiska metoden.

För- och nackdelar med litteraturstudie är:

<b>Fördelar</b>	<b>Nackdelar</b>
+ Sammanfattar kunskap, "ordnar upp kaoset"	- Begränsad till befintlig litteratur
+ Ny kunskap till följd av ett stort urval	- Svårt att få egen vinkling
+ Helheten berättar mera än delarna enskilt	- "Cherry picking"
+ Kräver ingen tillgång på respondenter	

Tabell 1. (Pedersen & Reidunsdatter, 2018)

### 3.4 Tillförlitlighet, trovärdighet och etik

Såväl tillförlitligheten som trovärdigheten kring litteraturen är hög eftersom källorna håller god vetenskaplig nivå, större delen i form av vetenskapliga artiklar, doktorsavhandlingar och rapporter på vetenskapliga studier gjorda av en eller flera forskare. Också databaserna som använts, dvs. Finna samt Google Scholar är tillförlitliga databaser med högklassigt material.

Gällande etik torde det inte vara några större stötestenar i arbetet då materialet är insamlat från litteratur som gjort sina egna etiska överväganden samt att det i detta arbete finns representerat flertalet nationaliteter av båda könen utan någon som helst begränsning av religiösa, politiska eller sexuella preferenser. Urvalet har skett enbart på basis av litteraturens relevans för arbetet. Omarbetningen av litteraturen har närmast varit omformulering samt sammanfattning för att samla relevant information från litteraturen för jämförelser kring detta arbetes forskningsfrågor.

Till viss del kan det ses som en nackdel att en forskare (P-E Persson) är representerad med flera studier, något som riskerar vinkla resultatet rätt mycket i hans forsknings riktning, men eftersom det inte finns särskilt många andra lika relevanta studier gjorda torde det ändå ge en bättre bild över området än att lämna bort flera bra studier som han gjort.

## 4. Tvärvetenskaplig relevans

Matematik må vara det skolämne som främst kopplas ihop med räknare och andra digitala verktyg, men i och med att matematiken används som verktyg i många andra skolämnen blir också matematikkunskap central inom andra ämnen. Ser vi på den matematiska tillämpningen som används i skolmiljö inom andra ämnen än matematik så handlar det utöver beräkningar till stor del om diverse digitala verktyg som illustrerar bland annat olika samband och statistiska utfall.

Studentskrivningarna i Finland innehåller inte bara inom matematiken en rad digitala verktyg, utan också i ämnen som geografi, biologi, kemi och fysik förväntas de studerande kunna producera grafer, tabeller mm. och sedan ännu tolka och analysera informationen (Ylioppilaututkintolautakunta - Studentexamensnämnden, 2020). Detta ställer förstås också vissa krav på implementering av digitala verktyg också inom andra ämnen, varpå lärarna i dessa ämnen också bör utbilda sig för att på ett ämnesdidaktiskt sätt undervisa användningen av åtminstone de digitala verktyg som kan vara till nytta vid studentskrivningarna i eget undervisningsämne.

När det kommer till de närbesläktade ämnena till matematiken är det också värt att fundera över om det är skillnad på om den handhållna enheten eller datormjukvaran används. Enligt Perssons studie upplever de studerande att den handhållna enheten är att föredra vid mindre omfattande uppgifter och problem eftersom den upplevs snabbare att jobba med, samt lättare att bära med sig, medan uppgifter med större omfattning är lättare att strukturera på datorn. (Persson, 2011)



## 5. Resultat

I detta kapitel besvaras forskningsfrågorna en åt gången med hjälp av tidigare forskning - nu med spegling i TPACK-modellen. Avgränsning görs i huvudsak till TI-Nspire räknaren, men kommentarer och resultat som gjorts kring digitala verktyg i större allmänhet lyfts också fram där de har relevans. Likaså begränsas matematiken huvudsakligen till ämnesområdet algebra, men där det är relevant för alla matematiska områden beskrivs också resultat om matematiken som ämne.

### 5.1 Hur *påverkar* användningen av TI-Nspire *förståelsen* för algebraiska fenomen?

Eftersom det med hjälp av TI-Nspire går att jobba betydligt snabbare (vid tillräcklig teknisk kunskap, TK) jämfört med enbart papper och penna som hjälpmedel är det också lättare att nå längre in i matematiken och kunskapen blir djupare. Samtidigt ger användningen av TI-Nspire möjligheter att prova sig fram, samt testa sina lösningar på ett effektivt sätt, vilket visat sig gynna förståelsen för matematik då det inte behövs så mycket koncentration på enkla beräkningar och plottande av grafer. Med detta sagt finns det ändå ett antal lärare i Perssons studie som menar att en djupare förståelse inom matematik kräver mekaniskt räknande. Utöver en aktiv användning av TI-Nspire krävs också aktivitet med penna och papper för att sätta fokus på stegen i utförandet, dvs. vägen till målet. (Persson, 2011) Denna oro över att inte enbart TI-Nspire skulle räcka som arbetsredskap kan vara befogad eftersom lärarna besitter hög ämneskunskap, CK, och via erfarenhet har konstaterat att den djupaste lärandet bör ske med papper och penna, men oron kan också vara ett tecken på en inte så långt utvecklad teknisk ämneskunskap, TCK, varför de i sådana fall inte ser alla tekniska möjligheter att bana väg för djupare förståelse av algebraiska fenomen.

När det kommer till effekt på resultaten har Lyublinskaya och Tournaki påvisat en skillnad i vilken typ av grafräknare som används då TI-Nspire jämfördes med en icke-symbolhanterande TI-84 Plus. De grupper som använde sig av TI-Nspire gjorde klart bättre resultat i testerna och i en jämförelse mellan flickor och pojkar var det en tydlig skillnad i gruppen som använde TI-Nspire, där flickorna presterade klart bättre, dock upptäcktes ingen sådan skillnad mellan könen i kontrollgruppen, vilket kunde indikera att flickor gynnas mera än pojkar av användningen av TI-Nspire. (Lyublinskaya & Tournaki, 2011) Att flickors

prestation förbättras mer än pojkars vid användning av tekniska hjälpmedel i undervisningen är något som forskningen inte alla gånger håller med om, resultaten varierar bland annat på vilka stadier som undersöks samt vilken frågeställning studierna har (U.S. Department of Education, 2001). Skillnaden mellan resultaten med de olika räknarna kan möjligen förklaras med stöd av forskning som säger att användningen av varierande metoder och tekniker i undervisningen gynnar helhetsförståelsen (Ellington, 2003).

En annan påverkan som framkommer av Lyublinskaya och Tournakis studie (2011) är att högpresterande studerande presterar relativt sett starkast när de får ett kraftfullt verktyg som TI-Nspire till förfogande, detta kan möjligen förklaras av att de är på tillräckligt hög nivå kunskapsmässigt att de kan utnyttja de egenskaper som räknaren har. Samtidigt kan svagare studerandes relativt sett mindre förbättring eventuellt förklaras av att deras stötestenar är på en så låg nivå att de inte lyckas tillgodogöra sig de fördelar som TI-Nspire har att erbjuda gentemot TI-84 Plus. (Lyublinskaya & Tournaki, 2011)

## 5.2 Vilka *möjligheter* erbjuder TI-Nspire till algebraundervisningen?

Persson konstaterar i sin studie att interaktionen studerande emellan, samt mellan lärare och studerande ökar markant vid användning av TI-Nspire, särskilt vid användning av mjukvaran på dator. Som en följd av denna ökade interaktion utvecklas gemensamt en starkare kunskap för ämnet, CK, samtidigt som den hjälpande studiekompisen utvecklar sina pedagogiska färdigheter, PK. En annan följd av den ökade interaktionen studerande emellan är att undervisningen blir mindre lärarstyrd och de studerande blir mera självständiga samtidigt som läraren frigörs som resurs. (Persson, 2011)

Nu när vi har kraftfulla digitala verktyg såväl i skolorna som i arbetslivet bör vi samtidigt se över ämnesinnehållet som undervisas, men istället för att gräma sig över en förändring som innebär mera jobb under förändringsprocessen bör vi också se de berikande aspekter som tekniken erbjuder, exempelvis öppnas många nya vägar till förståelse samtidigt som inga dörrar stängs (Kaye & Chick, 2000). Vi bör i detta sammanhang komma ihåg att arbetslivets förväntningar och behov förändras och att studerande numera behöver en allt högre teknisk kunskap, TK, samt en teknisk ämneskunskap, TCK, eftersom arbetsuppgifterna i de flesta branscher omfattar tekniska hjälpmedel i någon mån.

I Perssons longitudinella studie av förbättrad gymnasieundervisning framkommer till följd av användningen av TI-Nspire en positiv utveckling hos studerande med svaga eller väldigt svaga

förkunskaper, som med gynnsamma förutsättningar och rätt instruktioner och vägledning lyckats förändra såväl attityden till matematikämnet som täppa till kunskapsluckor under vägen och klara hela naturvetenskapslinjens matematikkurser trots dåliga odds från början. Resultatet påverkas högst sannolikt av möjligheten att delta i en extra stödgrupp som erbjöds under hela studiens gång, där hjälp fanns att få med att gå tillbaka till tidigare problemområden och fylla kunskapsluckor för att hänga med i den vardagliga undervisningen. (Persson, 2010) En bidragande orsak till den lyckade stödgruppen är sannolikt den erfarenhet som Persson själv bidragit med från sin roll som såväl lärare som forskare och har på så vis kunnat använda sig av sin förmodade starka TPACK nivå för att möta de studerande i stödgruppen på den nivå de befann sig.

### 5.3 Vilka *utmaningar* skapas genom användning av TI-Nspire i algebraundervisningen?

Rent generellt upplevs införande av nya digitala verktyg besvärligt och svårt av såväl lärare som studerande, det tar tid att lära sig använda verktygen och TI-Nspire är inget undantag. Däremot anser de flesta studerande i Perssons studie att verktyget blir ganska lätt att använda efter "inkörningsperioden". Hur lång tid denna inkörningsperiod blir beror i stor utsträckning också på hur väl läraren kan hantera räknaren själv, TK, samt hur pedagogiskt hen är kapabel att framföra och undervisa det tekniska verktyget, dvs hur stark teknisk pedagogisk kunskap, TPK läraren besitter. Särskilda svårigheter uppstår enligt samma studerandegrupp i samband med användningen av CAS (Computer Algebra System). Svaren upplevs svåra att hantera och förstå och ibland är det oklart vad man håller på med. Ibland beror svårigheterna på brister i matematikförståelsen, men lika vanligt är det att förståelsen för tekniken fallerar, alltså besitter inte de studerande tillräckliga ämneskunskaper, CK, eller tekniska kunskaper, TK. (Persson, 2011)

Vid användning av den handhållna enheten uppmärksammades i Perssons studie att dokumentationen av uppgiftslösningar ofta var bristfälliga till följd av den långsamma process det innebär att med en liten display och små tangenter dokumentera, medan lösningarna gjorda på mjukvaruversionen oftare var väldokumenterade. Kombinationen av dessa två är enligt lärarna det ideala i klassrumsmiljö för att vid tillräcklig teknisk ämneskunskap, TCK, kunna välja det mera ändamålsenliga alternativet i varje situation. (Persson, 2011)

En utmaning som uppstår när tekniska verktyg ska integreras i undervisningen blir att besluta på vilket sätt undervisningen behöver formas om. Att bara tillämpa tekniska verktyg för att ersätta traditionella metoder visar inte på någon som helst teknisk pedagogisk kunskap, TPK, eftersom man då inte låter möjligheterna i tekniken stiga fram. Vid införande av digitala verktyg bör de väsentliga delarna kartläggas, för klart är också att man behöver en förståelse av begrepp och representationer av dessa, CK, för att förstå när och hur de kan användas, samt vad svaret som fås betyder. (Persson, 2010)

#### 5.4 Vilken är *lärarens roll* när TI-Nspire används i algebraundervisningen?

När ett nytt digitalt verktyg tas in i undervisningen bör läraren helt naturligt vara några steg före de studerande gällande den tekniska kunskapen, TK, för att kunna erbjuda en undervisning som gynnar såväl den tekniska kunskapen, TK, som ämneskunskapen, CK, dvs den tekniska ämneskunskapen, TCK. Om läraren gör ett bra jobb (vilket i denna avhandling syftar på en välutvecklad teknisk, pedagogisk ämneskunskap, TPACK) i inledande skede ökar motivationen hos de studerande och föder en positiv spiral där studerande upplever matematiklektionerna som roligare och mera givande. (Persson, 2011)

Den signifikanta skillnaden som uppstod mellan grupperna som arbetade med TI-Nspire respektive TI-84 Plus i Lyublinskaya och Tournakis studie kan vidare förklaras med att lärarna i denna studie under hela året som studien pågick fick utveckla sin lärarprofession och samtidigt också ökade sin tekniska kunskap, TK, samt via erfarenheterna under hela året utvecklade hela sin tekniska, pedagogiska ämneskunskap, TPACK, och således enligt TPACK-modellen blev bättre lärare. (Lyublinskaya & Tournaki, 2011)

För att vidareutveckla resonemanget kan vi ta stöd i Lyublinskaya och Tournakis vidare studie på samma område, men med fokus på just hur lärarens TPACK nivå korrelerar med studerandes prestationer. Studien av lärarnas TPACK nivåer visar att de grupper som undervisades av lärare med högre nivå av TPACK också var de grupper med signifikant högre andel över poänggränserna för "Regent Diploma Level" och "Local Diploma level". (Lyublinskaya & Tournaki, 2011)

Vidare undersöker studien också samband mellan förberedda lektionsplaner och genomförande av lektionerna, där det framkommer att undervisningsnivån på lektionerna inte mera än i ett enda fall överstiger nivån av lektionsplanen. Slutsatsen de drar av detta resultat är att lektionsplanens värde förstärks i och med att det med ett sådant resultat

indikerar att lärare inte kan hålla bättre nivå på lektionen än nivån på lektionsplanen som är uppgjord. I sammanhanget bör också nämnas att ingen av lärarna i studien lyckades nå upp till en TPACK nivå 4 eller 5 av 5, den högsta nivån bland de deltagande lärarna var nivå 3 som betyder att de klarar av att tillämpa TI-Nspire i undervisningen, men inte ännu utforska (nivå 4) eller avancera (nivå 5). (Lyublinskaya & Tournaki, 2011)

En slutsats som kan dras av dessa resultat är att studerandes utveckling inom matematikämnet gynnas av användningen av TI-Nspire i undervisningen såvida läraren besitter en god nivå av TPACK. På motsvarande sätt blir användningen av TI-Nspire en belastning ifall läraren inte använder räknaren på ett ändamålsenligt sätt enligt TPACK-modellen.

## 6. Diskussion

I detta kapitel binds arbetet ihop genom en metoddiskussion där metodval och tillvägagångssätt diskuteras och en sammanfattande resultatdiskussion som behandlar de uppställda forskningsfrågorna. Kapitlet avslutas med förslag på vidare forskning.

Enligt Skolinspektionens rapport om digitala verktyg i undervisningen bedömer Skolinspektionen i Sverige att man på mer än hälften av högstadieskolorna i granskningen inte tillämpar digitala verktyg på ett ämnesdidaktiskt sätt (dvs. låg nivå av teknisk, pedagogisk ämneskunskap TPACK) (Skolinspektionen, 2019), något som möjligen också gäller Finland i motsvarande utsträckning. Så även om de digitala verktygen under de senaste två decennierna fått en allt större roll i matematikundervisningen finns det ännu uppenbara brister i tillämpningen av dem.

### 6.1 Metoddiskussion

I utarbetandet av tillvägagångssättet som använts i detta arbete har tidigare forskning inom området fått en väsentlig roll, inspiration har hämtats såväl från tidigare avhandlingars (pro gradu) tillvägagångssätt liksom också universitetets egna riktlinjer. Strukturen på arbetet har levt mycket sedan arbetet påbörjades och metoden rentav ändrades i ett relativt sent skede, dock fortsatte arbetet inom samma ämnesområde med till stor del samma material. I och med att största delen av denna avhandling är skriven under sommarmånaderna har inte handledningen varit särskilt tät, men tack vare tidigare erfarenhet av examensarbete från yrkeshögskola är förfaringssättet med ett arbete av detta slag samt vetenskapligt skrivande en någorlunda bekant arena, vilket har förenklat många steg i skrivprocessen.

För en striktare vetenskaplig karaktär kunde litteraturstudien genomförts i form av en systematisk litteraturstudie istället för den allmänna litteraturstudie som blev fallet. Ämnet med sina avgränsningar som slutligen blev föremål för arbetet saknar tillräckligt antal relevanta källor för en systematisk litteraturstudie, varför resultatet inte skulle ge någon vidare allmängiltighet utan i sådana fall blivit något av en dålig kopia av tidigare studier.

I och med situationen med en rådande pandemi var omstruktureringen till en litteraturstudie ett taktiskt bra val för att kunna framskrida med arbetet effektivt under sommarmånaderna

och speciellt då det är ytterst svårt att förutspå hur hösten kommer att se ut, om det ens skulle vara möjligt att som utomstående göra en studie i någon skola.

Litteraturen som har använts i arbetet har till största delen varit av god vetenskaplig karaktär, men för att belysa bland annat samhällsdebatter och åsikter kring några ämnen har också populärvetenskaplig skrift använts. Dock på ett sådant sätt att inte trovärdigheten i arbetet skulle försämrats, utan tvärtom, lyfter dessa populärvetenskapliga artiklar fram bakomliggande orsaker till att vissa undersökningsvinklar behövs.

Tyvärr existerar inte särskilt mycket forskning i Norden på temat, vilket gjort att den smala forskning som funnits närmast den skolmiljö som litteraturstudien är tänkt att undersöka, har blivit frekvent använd och således ganska styrande också i resultaten, vilket kan sänka kvaliteten en aning. Dock är det bättre med relevanta källor än att försöka generalisera resultat från ett helt annat skolsystem till vårt eget utan tillräcklig vetskap om huruvida resultatet är generaliserbart eller inte. Ett antal studieresultat har trots allt varit gjorda på sådant sätt att resultatet till vissa delar eller i sin helhet varit generaliserbara och därmed också använts som beskrivande för våra skolor.

Även om TI-Nspire har funnits på marknaden mera än 10 år och i Finland använts under nästan hela den tiden på gymnasienivå finns det överraskande nog inga omfattande studier av användningen av den eller på vilket sätt undervisningen behöver anpassas vid användning av den som digitalt verktyg. Ser man till den internationella forskningen är det förvånansvärt skvalt också där gällande forskning kring TI-Nspire-räknaren och dess tillämpning i matematikundervisningen. Dessutom är större delen av det relevanta materialet som finns nästan 10 år gammalt, så även om räknaren är i stort sett densamma kan det ändå tänkas att en hel del trender och utfall skulle synas om man följde med utvecklingen av exempelvis algebrakunskapernas nivå i finländska gymnasier.

## 6.2 Resultatdiskussion

Syftet med hela arbetet har varit att kartlägga och lyfta fram vad forskningen säger kring hur man på bästa möjliga sätt implementerar de digitala verktyg som idag finns att tillgå, i den vardagliga matematikundervisningen på gymnasienivå. Via avgränsningen samt forskningsfrågorna har relevanta fragment av forskning inom området lyfts ut och sammanställts för att besvara forskningsfrågorna och således bringa lite klarhet i vad lärare

behöver känna till vid planering av upplägg samt vad som bör undvikas för att inte göra det digitala verktyget till primärfokus framom matematiken.

Att analysera resultatet med hjälp av TPACK-modellen var ett naturligt val i och med att hela problemställningen ligger i att få kombinerat de tre hörnstenarna, teknik, pedagogik och matematik på ett ändamålsenligt sätt. Ett par studier var bättre anpassade för att analysera med verktyget än andra, då en del väsentlig information saknades om hur lärarnas tillvägagångssätt sett ut i några fall, vilket gjorde att endast spekulationer kunde lyftas fram, men i något enstaka fall hittades också annan forskning som stöd för spekulativen.

Frågan om vem som egentligen gynnas mest av användning av symbolhanterande räknare som TI-Nspire förblir obesvarad. Med stöd för både att de svaga gynnas, samt att det är de starka studerande som gynnas mest, så det skulle kräva mera studier för att avgöra hur det verkligen ligger till. Dock visar forskningen på att både svaga och starka studerande gynnas, så frågan om vem som gynnas mest är av sekundärt intresse. Troligt är att studierna som motsäger varandra bortser från en eller flera faktorer som spelar en väsentlig roll för resultatet, samtidigt som ämnesinnehållet också kan vara av betydelse, liksom den undervisande lärarens TPACK nivå. Grupperna kan också skilja sig en hel del från varandra.

Ett väntat resultat som framkom är hur lärare, liksom de flesta andra människor, upplever förändring som besvärande, vilket gör att förändring möter motstånd på såväl det medvetna som omedvetna planet. För att lärare ska vara engagerade och gå helhjärtat in i förändringen krävs det att lärarna ska ha en tilltro till att arbetsinsatsen som görs för att åstadkomma förändringen ska ge ett resultat i önskad riktning (Agéll Genlott, Grönlund, & Viberg, 2019). Så från ledningshåll bör det också finnas ett stöd i förändringen både som mentalt stöd i utvecklingen och i form av utbildning och fortbildningsmöjligheter för att lärarna ska bli bekväma med att arbeta med det digitala verktyget och få tillräckliga kunskaper för att sedan kunna använda det på ett ämnesdidaktiskt sätt.

Genom användningen av snabba digitala verktyg som TI-Nspire får studerande snabb återkoppling på sina idéer och kan lätt testa med olika värden på variabler och se hur exempelvis en funktion beter sig utgående från förändringen som görs och således snabbare skapa sig en uppfattning om hur värden på variabler hör ihop med exempelvis den grafiska framställningen. Samtidigt som verktyget ger snabbt svar på idéer som studerande har bidrar det också till viss del att läraren som resurs i klassen frigörs då det inte i lika stor utsträckning handlar om att gå runt och kontrollera beräkningar mm. Istället kan resultatet bli att när



diverse problem uppstår skapar det en interaktion studerande emellan för att lösa eventuella tekniska bekymmer eller annat prat om matematik.

Under våren 2020 när COVID-19 tvingade skolorna att svänga om till distansundervisning inom loppet av två dygn blev det samtidigt startskottet till en "tvångsskolning" bland lärare att utveckla sin kompetens gällande att använda sig av olika digitala hjälpmedel och jobba i en digital miljö, något som för många haft en hög tröskel, är nu passerad. Framtiden får utvisa, men sannolikt kommer vi att se en märkbar förändring gällande sättet att se på teknik och dess möjligheter framöver i skolorna.

### 6.3 Förslag på vidare forskning

Något som skulle behövas inom området är forskning som berör TI-Nspire användningen i matematikundervisning med tanke på att det är en av de mest centrala programvarorna vid studentskrivningarna i matematik i Finland. För tillfället hittas bara ett fåtal avhandlingar som tangerar ämnet, men inget av högre vetenskaplig nivå än pro gradu.

Vad beträffar resultatet detta arbete har samlat kunde en bredare studie göras där man inte avgränsar matematiken till algebraområdet, utan istället ser på exempelvis på hur TI-Nspire lämpar sig till studier inom analys. Eftersom majoriteten av alla verksamma gymnasielärare har fått sin ordinarie utbildning under tiden då inga symbolhanterande räknare fanns att tillgå är heller inte särskilt många utbildade att använda sig av digitala verktyg på ett ämnesdidaktiskt sätt, så en omfattande studie där det presenteras åtminstone de större riktlinjerna för vad man som lärare bör ta i beaktande för att ändamålsenligt stöda sina studerande till en djupare förståelse med hjälp av de digitala verktyg som de förväntas använda sig av. Detta i kombination med fortbildningstillfällen med de som genomfört forskningen kunde ge hela finska gymnasieskolan ett uppsving då flera lärare skulle höja sin kompetens till en nivå där den symbolhanterande räknaren uppfyller sin potential som kraftfullt verktyg i undervisningen.

## Litteraturförteckning

- Agéllii Genlott, A., Grönlund, Å., & Viberg, O. (2019). Disseminating digital innovation in school – leading second-order educational change. *Education and Information Technologies*, 3021-3039.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra - Perspectives for Research and Teaching*. Springer, Dordrecht.
- Brusilovsky, P., Knapp, J., & Gamper, J. (2006). Supporting teachers as content authors in intelligent educational systems. *International Journal of Knowledge Learning (3/4)*, 191-215.
- Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 433-463.
- Finna. (den 24 Juli 2020). *Finna*. Hämtat från Finna: [www.finna.fi](http://www.finna.fi)
- Geogebra. (den 07 Juli 2020). *Geogebra*. Hämtat från Geogebra: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)
- Hemmi, K., Bråting, K., & Lepik, M. (2020). Curricular approaches to algebra in Estonia, Finland and Sweden – a comparative study. *Mathematical Thinking and Learning*.
- Hemmi, K., Lepik, M., Madej, L., Bråting, K., & Smedlund, J. (2019). *Introduction to early algebra in Estonia, Finland and Sweden – some distinctive features identified in textbooks for Grades 1-3*. CERME11.
- Kaye, S., & Chick, H. (2000). The Future of Teaching and Learning of Algebra - Discussion Document for the Twelfth ICMI Study. *Educational Studies in Mathematics*, ss. 215–224.
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). *What Is Technological Pedagogical Content Knowledge?* Michigan, USA: Michigan State University.
- Lyublinskaya, I., & Tournaki, N. (2011). The Effect of Teaching and Learning with Texas Instruments Handheld Devices on Student Achievement in Algebra. *Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 5-35.
- Lyublinskaya, I., & Tournaki, N. (2011). The Effects of Teacher Content Authoring on TPACK and on Student Achievement in Algebra: Research on Instruction with the TI-Nspire™ Handheld. *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2011*, 4396-4401.
- Pedersen, G. A., & Reidunsdatter, R. J. (2018). *Litteraturstudie som metode*. Trondheim, Norge.
- Persson, P.-E. (2008). *Algebra – en väg till eller resultatet av god taluppfattning?* Trondheim, Norge: NTNU.
- Persson, P.-E. (2010). *Räkna med bokstäver! En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå*. Luleå: Luleå Tekniska Universitet.
- Persson, P.-E. (2011). *Att undervisa och lära matematik på gymnasienivå med TI Nspire teknologi*. Malmö: Malmö Högskola.

- Reznichenko, N. (2007). *Learning with graphing calculator (GC): GC as a cognitive tool*. Clearwater, FL: ERIC Clearinghouse.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge Growth in Teaching. *Teaching and learning in the primary school*, ss. 84-89.
- Skolforskningsinstitutet. (2018). *Digitala lärresurser i matematikundervisningen Delrapport skola. Systematisk översikt 2017:02 (1/2)*. Solna: Skolforskningsinstitutet. Hämtat från <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1257371/FULLTEXT01.pdf>
- Skolinspektionen. (2019). *Digitala verktyg i undervisningen - Matematik och teknik i årskurs 7-9*. Stockholm: Skolinspektionen.
- Studentexamensnämnden. (den 8 Maj 2019). *Studentexamen*. Hämtat från [https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston\\_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset\\_fi\\_maaraykset\\_matematiikka\\_digitaalinen\\_koe.pdf](https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Ohjeet/Koekohtaiset_fi_maaraykset_matematiikka_digitaalinen_koe.pdf)
- Texas Instruments. (den 21 Juli 2020). *TI-Nspire™ CX CAS handheld*. Hämtat från Texas Instruments Education Technology: <https://education.ti.com/en/products/calculators/graphing-calculators/ti-nspire-cx-cas?category=specifications>
- Thunberg, H., & Lingefjärd, T. (2006). Öppet brev till Skolverket: Avancerade räknare - hjälper eller stjälper? *Nämna*.
- U.S. Department of Education. (2001). *The Nation's Report Card Mathematics 2000*. Washington, DC: U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement.
- Utbildningsstyrelsen. (2003). *Grunderna för gymnasiets läroplan*. Hämtat från Opetushallitus - Utbildningsstyrelsen: <https://www.oph.fi/sv/utbildning-och-examina/grunderna-gymnasiets-laroplan>
- Utbildningsstyrelsen. (2004). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen*. Hämtat från Opetushallitus - Utbildningsstyrelsen: <https://www.oph.fi/sv/utbildning-och-examina/grunderna-laroplanen-den-grundlaggande-utbildningen>
- Utbildningsstyrelsen. (2014). *Grunderna för läroplanen för den grundläggande utbildningen*. Hämtat från Opetushallitus - Utbildningsstyrelsen: <https://www.oph.fi/sv/utbildning-och-examina/grunderna-laroplanen-den-grundlaggande-utbildningen>
- Utbildningsstyrelsen. (2015). *Grunderna för gymnasiets läroplan*. Hämtat från Opetushallitus - Utbildningsstyrelsen: <https://www.oph.fi/sv/utbildning-och-examina/grunderna-gymnasiets-laroplan>
- Utbildningsstyrelsen. (2019). *Grunderna för gymnasiets läroplan*. Hämtat från Opetushallitus - Utbildningsstyrelsen: <https://www.oph.fi/sv/utbildning-och-examina/grunderna-gymnasiets-laroplan>
- Vygotskij, L. (1999). *Tänkande och språk*. (K. Öberg Lindsten, Övers.) Göteborg: Daidalos.

- WolframAlpha. (den 07 Juli 2020). *WolframAlpha*. Hämtat från WolframAlpha computational intelligence: <https://www.wolframalpha.com/>
- Yang Hansen, K., Gustafsson, J.-E., Rosén, M., Sulkunen, S., Nissinen, K., Kupari, P., . . . Hole, A. (2014). *Northern Lights on TIMSS and PIRLS 2011*. Köpenhamn: Nordiska ministerrådet.
- Yerushalmy, M. (2006). Slower Algebra Student Meet Faster Tools: Solving Algebra Word Problems With Graphing Softwar. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(5), 356-387.
- YLE. (den 29 Augusti 2018). *Många abiturienter kan inte de dataprogram som behövs i studentexamen - lärare har inte hunnit undervisa, säger elever*. Hämtat från Svenska YLE: <https://svenska.yle.fi/artikel/2018/08/29/manga-abiturienter-kan-inte-de-dataprogram-som-behovs-i-studentexamen-larare-har>
- Ylioppilastutkintolautakunta - Studentexamensnämnden. (den 30 Juli 2020). *Beskrivningar av de digitala proven*. Hämtat från Ylioppilastutkintolautakunta - Studentexamensnämnden: <https://www.ylioppilastutkinto.fi/sv/studentexamen/den-digitala-studentexamen/beskrivningar-av-digitala-prov>