



FAKULTETSOMRÅDET FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

PRO GRADU-AVHANDLING

MATEMATIK

Optimal stokastisk reglering och estimering med Kalmanfiltret

Skribent:

Tuomas VIRTANEN

Handledare:

Mikael KURULA

2020

Förord

Arbetet som presenteras i denna avhandling, som handlar om Kalmanfiltret och optimal reglering av linjära stokastiska system, har gjorts vid Fakulteten för naturvetenskaper och teknik vid Åbo Akademi. Största delen av arbetet gjordes under sommaren och hösten 2019. Stort tack till min handledare Mikael Kurula med all hjälp och tid under arbetets gång. Jag vill även tacka professor Paavo Salminen för hans kommentarer. Jag vill också tacka min familj och mina vänner för all stöd under denna tid.

Åbo, Juli 2020

Tuomas Virtanen

Abstrakt

Linjära system används för matematiska modeller inom många olika områden, bland annat reglerteknik. Avhandlingen behandlar teori för MIMO-system (eng. Multiple Input Multiple Output), det vill säga modeller som består av tillståndsvariabler, en styrsignal bestående av flera inputvariabler och en mätsignal som ger information om flera av systemets tillståndsvariabler. Då systemet dessutom påverkas av störningar, mätsignalen påverkas av mätfel och endast några av tillståndsvariablerna kan mätas är systemet stokastiskt. Huvudsyftet med avhandlingen är att se på hur man kan reglera ett stokastiskt MIMO-system optimalt med avseende på att minimera en kvadratisk kostnadsfunktional. Detta är det så kallade LQG-problemet (eng. Linear Quadratic Gaussian) som är ett tvådelat problem. Eftersom systemet är stokastiskt måste systemets tillstånd estimeras och sedan måste en styrsignal bestämmas så att kostnaden minimeras. Metoden för estimeringen av tillståndet är ett Kalmanfilter och i denna avhandling delas filtret upp i två delar, Kalmanprediktorn och Kalmankorrektorn. Minimeringen av kostnaden kan göras separat och sedan kan skattningen given av prediktorn eller korrektorn användas för att beräkna den optimala reglersignalen för systemet. Avhandlingen belyser med ett exempel på reglering av två kopplade elnätverk att reglering med användning av skattningen som ges av prediktorn fungerar och bör användas även då mätsignalen saknas en längre tid. För exemplet har ett simuleringsprogram skrivits i MATLAB.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Linjär systemteori	4
2.1	Introduktion	4
2.1.1	Sampling av tidskontinuerliga linjära system	6
2.2	Egenskaper hos tidsdiskreta LTI-system	8
2.2.1	Styrbarhet	8
2.2.2	Observerbarhet	10
2.2.3	Stabiliserbarhet	12
2.3	Luenbergerobservatör	14
2.3.1	Separationsprincipen	15
2.4	Optimal reglering	16
2.4.1	Oändlig tidshorisont	21
3	Optimal stokastisk estimering	23
3.1	Definitioner och antaganden för diskreta stokastiska system	23
3.2	Estimering med Kalmanfiltret	26
3.3	Stationärt Kalmanfilter	39
3.4	Sampling av tidskontinuerliga stokastiska system	41
4	Optimal stokastisk reglering	47
4.1	Reglerproblemet	47
4.2	Minimering av kostnaden genom tillståndsåterkoppling	51
4.3	Minimering av kostnaden genom återkoppling av det skattade tillståndet	54
4.4	Optimal reglering av två kopplade elnätverk	58

5	Sammanfattande diskussion	65
A	Matristeori	67
A.1	Matrisalgebra	67
A.2	Matrisexponentialfunktionen	70
B	Sannolikhetssteori	72
B.1	Grundläggande sannolikhetslära	72
B.1.1	Väntevärde och varians	73
B.1.2	Fördelningsfunktion	74
B.1.3	Oberoende stokastiska variabler	75
B.1.4	Betingat väntevärde	76
B.2	Flerdimensionella stokastiska variabler	77
B.2.1	p -dimensionell normalfördelning	80
C	Programkod	81
C.1	Exempel 3.24	81
C.2	Kopplade elnätverk	85
	Litteratur	90

Kapitel 1

Inledning

Ett system av linjära differentialekvationer används för att bland annat beskriva biologiska, fysikaliska eller finansiella modeller. Inom reglerteori studeras system som har styrbara variabler, exempelvis acceleration, samt en mätsignal som ger någon information om systemets olika tillstånd, exempelvis hastighet och position. Då systemets tillstånd dessutom påverkas av störningar och mätsignalen innehåller mätfel, kan systemet modelleras som ett stokastiskt system. Ett exempel på ett sådant system är satellitnavigering, där GPS-mottagaren beräknar sin position utgående från mätsignaler från flera satelliter. Återkoppling är ett centralt begrepp inom reglerteori och med detta avses att mätsignalen används för att reglera systemet.

Det linjärvadratiska gaussiska reglerproblemet (LQG-problemet) är ett välstuderat och fundamentalt stokastiskt reglerproblem där modellen är linjär, kostnadsfunktionalen är kvadratisk, störningarna samt mätfelen är additivt gaussiskt vitt brus och problemet är att hitta en reglersignal som minimerar kostnadsfunktionalen. Detta problem är tvådelat, å ena sidan har vi det linjärvadratiska estimeringsproblemet (LQE) att skatta systemets tillstånd, å andra sidan har vi det linjärvadratiska reglerproblemet (LQR) att konstruera själva regulatorn som reglerar systemet optimalt. Det visar sig att dessa två problem kan lösas oberoende av varandra och lösningen på estimeringsproblemet i diskret tid ges av det så kallade Kalmanfiltret, utvecklat huvudsakligen av den ungerskfödda amerikanska matematikern Rudolf Kalman på 1960-talet.

Avhandlingens upplägg är att i kapitel 2 ge en kort introduktion till linjär systemteori av deterministiska system. I denna avhandling används en så

kallad tillståndsmodell för linjära system som introduceras i introduktionskapitlet. Tillståndsmodellen bygger på differentialekvationer som beskriver systemet. Ddifferentialekvationen för tillståndsvektorn löses i introduktionskapitlet. Denna lösning samplas, vilket betyder att systemet i kontinuerlig tid överförs till ett diskretiserat system. Styrbarhet, observerbarhet och stabiliserbarhet är några egenskaper som går igenom i korthet för system i diskret tid. Dessa egenskaper är viktiga för att regleringen av systemet ska vara användbar och speciellt viktiga för att kunna minimera kostnaden för regleringen. Återkoppling och optimal reglering av deterministiska system samt konstruktionen av en så kallad Luenbergerobservatör introduceras också i introduktionskapitlet. För detta introduktionskapitel har i huvudsak [HRS07], [Lue79], [LXP08] och [TSH01] använts.

Kapitel 3 behandlar teorin för optimal stokastisk estimering. I detta kapitel definieras stokastiska system och vilka antaganden som sedan används för att bygga upp teorin för att kunna estimeras tillståndsvektorn. Detta görs vanligtvis med ett så kallat Kalmanfilter, men i denna avhandling ges en tvådelad metod för skattningen genom Kalmanprediktorn och Kalmankorrektorn. Idén för att dela upp Kalmanfiltret har tagits från [LXP08] och i denna avhandling görs ett försök att rigoröst definiera och härleda formler för att beräkna dessa skattningar, där också [LR95] och [Åst70] har varit till stor hjälp. För den stokastiska teorin har [Gir03], [Kay93], [JP03] och [Ros10] använts som källor. Meningen med det uppdelade Kalmanfiltret är att ha en optimal skattning av tillståndet både då ny information om systemet är tillgängligt och då ingen ny information är tillgänglig men en optimal skattning behövs för att optimalt reglera systemet. I detta kapitel introduceras också kort det stationära Kalmanfiltret och samplingen av stokastiska system i kontinuerlig tid, för dessa har utöver [Åst70] också [HRS07] använts som källa.

Kapitel 4 behandlar teorin för optimal stokastisk reglering. I detta kapitel presenteras LQG-problemet och verktygen för att lösa minimeringsproblemet av den kvadratiske kostnadsfunktionalen härleds. Konstruktionen av den optimala regulatorn för systemet bestäms både då mätsignalen ger exakt systemets tillstånd och då mätsignalen påverkas av brus. Det andra fallet är huvudresultatet och ger alltså den optimala reglersignalen för det stokastiska systemet där tillståndsvektorn estimeras med Kalmanprediktorn eller Kalmankorrektorn introducerade i kapitel 3.

För att tillämpa resultatet finns ett exempel på reglering av kopplade elnätverk där artiklarna [AA11], [PMH13], [Ros+13] och [Sha+16] har studerats för ändamålet. Differentialekvationerna samt olika parametervärden är tagna ur artiklarna. För tillämpningen har ett simuleringsprogram skrivits i MATLAB och programkoden för detta hittas i bilagan.

I bilagan finns också grundläggande teori för matrisalgebra, matrisexponentialfunktionen och sannolikhetssteori. Teorin för betingade väntevärdet och flerdimensionella normalfördelningen är synnerligen viktiga och läsaren ombeds bekanta sig med dessa före kapitel 3.

Kapitel 2

Linjär systemteori

2.1 Introduktion

Matematiska modeller vars beteende kan beskrivas med hjälp av flera linjära differentialekvationer ger upphov till teorin om linjära system. Detta kapitel introducerar deterministiska tidsinvarianta linjära system och deras egenskaper. Deterministisk system- och reglerteori fungerar som en introduktion till den mera krävande stokastiska reglerteori som är den huvudsakliga teorin i denna avhandling. Som grundläggande teori för linjär systemteori används matristeori samt linjär algebra och en kort sammanfattning av det som använts här finns i bilaga A.

Exemplet nedan används som ett genomgående exempel i avhandlingen för att belysa de olika teoridelarna. Exemplet är ett utvidgat exempel av [Sär13, Exempel 3.6, s. 43–45].

Exempel 2.1. Låt x_1 och x_2 vara x - respektive y -koordinaterna för en punkt i planet. Sätt $x_3 = \frac{dx_1}{dt}$ och $x_4 = \frac{dx_2}{dt}$. Då är x_3 och x_4 punktens hastighet i x - respektive y -riktning. Anta att accelerationen är noll i båda riktningarna, det vill säga $\frac{dx_3}{dt} = 0$ och $\frac{dx_4}{dt} = 0$. Vidare anta att vi kan styra punktens acceleration och beteckna dessa inputvariabler med u_1 och u_2 . Låt nu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ och $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$. Då kan vi beskriva systemets beteende på vektorform enligt

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

eller kort $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$. Om vi har tillgång till den exakta positionen av punkten men inte dess hastighet eller acceleration så kan vi beskriva en utsignal för systemet enligt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

eller kort $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$.

Modellen enligt vilken systemet i exemplet beskrivs kallas *tillståndsmodellen* och är speciellt användbar för linjära system med flera input- och outputvariabler. Sådana system kallas också *MIMO-system* (eng. Multiple Input Multiple Output). Den formella definitionen för ett *linjärt tidsinvariant system* (LTI-system) i kontinuerlig tid är följande:

Definition 2.2. Vektorn $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ beskriver systemets tillstånd vid tidpunkt t och kallas *tillståndsvektorn*, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ är en deterministisk *insignal* som styr systemet och $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ är en *utsignal* som ger en *mätning* av systemets tillstånd. Då kan systemet skrivas på tillståndsmodellen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (2.2)$$

Tillståndet $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ är systemets *starttillstånd*. Avbildningen \mathbf{A} kallas *systemmatris*, \mathbf{B} *insignalmatris*, \mathbf{C} *utsignalmatris* och \mathbf{D} *direktmatris*.

Matriserna \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} och \mathbf{D} antas här vara konstanta, därför kallas systemet tidsinvariant. Oftast kan direktmatrisen \mathbf{D} utelämnas och då kallas systemet *strikt propert*. Systemet i exempel 2.1 är ett exempel på ett strikt propert system.

Systemets tillstånd vid tidpunkt t kan beräknas utgående från ett känt starttillstånd \mathbf{x}_0 och en given styrsignal $\mathbf{u}(t)$ genom att lösa följande begynnelsevärdesproblem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Lösning: Skriv om differentialekvationen som

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

och multiplicera med den integrerande faktorn $e^{\int(-\mathbf{A})dt} = e^{-\mathbf{A}t}$, där $e^{-\mathbf{A}t}$ är matrisexponentialfunktionen (se A.2), för att få

$$\begin{aligned}
e^{-\mathbf{A}t}(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) &\iff \frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\
&\iff e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds + \mathbf{x}(0) \\
&\iff \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds,
\end{aligned}$$

där sista ekvivalensen gäller enligt sats A.6. Den entydiga lösningen till (2.1) blir

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds. \quad (2.3)$$

2.1.1 Sampling av tidskontinuerliga linjära system

I praktiken sker styrning eller reglering av system med datorer som opererar i diskret tid men modellerna av system beskrivs oftast av differentialekvationer enligt fysikaliska modeller och är på formen (2.1)–(2.2). För regleringen behöver vi beskriva systemet i diskret tid och detta utförs med *sampling*. Samplingen utförs på det sättet att systemets tillstånd $\mathbf{x}(t)$ evalueras vid de diskreta tidpunkterna $t_k := kT$, där $T > 0$ är längden av samplingsperioden. Mätningarna av utsignalen görs vid tidpunkterna t_k och styrsignalen $\mathbf{u}(t)$ hålls konstant på varje samplingsintervall så att $\mathbf{u}_k := \mathbf{u}(t_k)$ då $t \in [kT, (k+1)T)$. Då styrsignalen skickas från datorn till systemet görs detta oftast med *digital-till-analog-omvandlare* och då styrsignalen är konstant på varje samplingsintervall har D\A-omvandlaren en *nollte ordningens hållkrets* (eng. zero-order hold; ZOH). Det samplade systemet önskas beskrivas av differensekvationen $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_s\mathbf{u}_k$, där $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}(t_k)$ och då behöver matriserna \mathbf{A}_s och \mathbf{B}_s bestämmas.

Enligt (2.3) fås att

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}(t_{k+1}) &= e^{\mathbf{A}t_{k+1}}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \\
&= e^{\mathbf{A}(k+1)T}\mathbf{x}_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \\
&= e^{\mathbf{A}T}e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}_0 + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}T}e^{\mathbf{A}(kT-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds \\
&= e^{\mathbf{A}T}\left(e^{\mathbf{A}t_k}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_k} e^{\mathbf{A}(t_k-s)}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)ds\right) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}((k+1)T-\tau)d\tau \\
&= e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(t_k) + \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(t_k)d\tau = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}_k + \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau}d\tau\right)\mathbf{B}\mathbf{u}_k.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

För utsignalen fås att

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_k &:= \mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t_k) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k.\end{aligned}$$

Det samplade systemet kan nu skrivas som

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_s\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_s\mathbf{u}_k,\end{aligned}$$

för $k = 0, 1, 2, \dots$ och matriserna ges av

$$\mathbf{A}_s := e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{B}_s := \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_s := \mathbf{C} \quad \text{och} \quad \mathbf{D}_s := \mathbf{D}.$$

Exempel 2.3. Vi utför sampling med ZOH-metoden av systemet som introducerades i exempel 2.1. Beteckna samplingsperioden med Δt . Eftersom $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$ och således är $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ för varje $k \geq 2$ fås enligt definitionen (A.2) för matrisexponentialfunktionen att

$$\mathbf{A}_s = e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_s &= \int_0^{\Delta t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta t & 0 & \frac{(\Delta t)^2}{2} & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 & \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (2.6)$$

Nu fås det diskretiserade systemet

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_s\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_s\mathbf{x}_k,\end{aligned}$$

där \mathbf{A}_s och \mathbf{B}_s ges av (2.5)–(2.6) och $\mathbf{C}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2 Egenskaper hos tidsdiskreta LTI-system

I fortsättningen behandlar vi endast strikt propra system i diskret tid och väljer därför direktmatrisen $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ och lämnar bort det nedre indexet s på matriserna. Det strikt propra *tidsdiskreta LTI-systemet* enligt tillståndsmodellen ges då av:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k.\end{aligned}\tag{2.7}$$

För givet starttillstånd \mathbf{x}_0 och en given styrsignal $\mathbf{u} := \{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{N-1}$ kan systemets (2.7) tillståndsekvation itereras för att få

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0, \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0) + \mathbf{B}\mathbf{u}_1, \\ &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^1\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \mathbf{A}^0\mathbf{B}\mathbf{u}_1, \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_N &= \mathbf{A}^N\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \dots + \mathbf{A}^0\mathbf{B}\mathbf{u}_{N-1}\end{aligned}$$

och lösningen till systemets (2.7) tillståndsekvation är då

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{A}^N\mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{N-1-k}\mathbf{B}\mathbf{u}_k.\tag{2.8}$$

Egenskaper som är viktiga att analysera är systemets styrbarhet, observerbarhet och stabiliserbarhet. I detta avsnitt ges kortfattat vad som menas med dessa egenskaper och hur systemmatriserna i (2.7) används för att kontrollera egenskaperna. Definitioner och satser för styrbarhet och observerbarhet för både tidsdiskreta och tidskontinuerliga system hittas exempelvis i [Lue79, s. 276–289].

2.2.1 Styrbarhet

Definition 2.4 (Styrbarhet). Ett tidsdiskret system (2.7) är *styrbart* om för varje tillstånd $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ och starttillståndet $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ finns ett ändligt index $N_{\mathbf{x}^*} > 0$ och en styrsignal $\mathbf{u} := \{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{N_{\mathbf{x}^*}-1}$ som tillämpat på (2.7) ger att $\mathbf{x}_{N_{\mathbf{x}^*}} = \mathbf{x}^*$.

Frågan är om det finns ett ändligt index N som inte beror av \mathbf{x}^* , men att varje tillstånd $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ kan nås från origo på N steg?

Då $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ kan lösningen (2.8) skrivas på matrisform enligt

$$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{N-1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_0 \end{pmatrix}.$$

Blockmatrisen framför styrsignalen $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{N-1}^T, \dots, \mathbf{u}_0^T)^T$ betecknas $\mathcal{C}_N(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

Sats 2.5. *Det tidsdiskreta systemet (2.7) med $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ är styrbart om och endast om det gäller för $n \times nm$ styrbarhetsmatrisen*

$$\mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

att

$$\text{rang } \mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = n.$$

För beviset av satsen behövs först ett hjälpresultat.

Lemma 2.6. *Låt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha full rang. Då gäller att \mathbf{A}^{n+k} är en linjärkombination av matriserna $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ för varje $k \geq 0$.*

Bevis. Enligt Cayley-Hamiltons sats är $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, där $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ är det karakteristiska polynomet

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i, \quad c_n = 1.$$

Vi får att

$$\mathbf{0} = p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbf{A}^i \iff \mathbf{A}^n = - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbf{A}^i,$$

det vill säga \mathbf{A}^n är en linjärkombination av $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$. Vidare gäller att

$$\mathbf{A}^{n+k} = - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \mathbf{A}^{i+k},$$

varför \mathbf{A}^{n+k} en linjärkombination av $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ för varje $k \geq 0$. \square

Bevis av Sats 2.5. Om $\text{rang } \mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = n$ så är matrisen surjektiv, vilket implikerar att systemet är styrbart.

Om systemet är styrbart så finns ett $N > 0$ och en styrsignal $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}$ så att $\mathcal{C}_N(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{u} = \mathbf{x}^*$, där $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ är godtyckligt. Anta att $N \geq n$, då fås som

följd av lemma 2.6 att matrisen $\mathbf{A}^{n+k}\mathbf{B}$ är en linjärkombination av matriserna $\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ i styrbarhetsmatrisen $\mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ för varje $k \geq 0$. Då kan vi hitta en ny styrsignal $\mathbf{u}_0^*, \dots, \mathbf{u}_{n-1}^*$, så att

$$\mathbf{x}^* = \mathcal{C}_N(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{u} = \mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{u}^*.$$

Detta visar att $\mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ är surjektiv och har således rangen n . \square

Eftersom systemets styrbarhet är oberoende av matriserna \mathbf{C} och \mathbf{D} sägs att matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) är styrbart.

Exempel 2.7. Vi undersöker styrbarhetsmatrisen för systemet i exempel 2.3. Systemmatriserna ges av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \end{pmatrix}.$$

Styrbarhetsmatrisen för detta system är då

$$\mathcal{C}_4(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \frac{(\Delta t)^2}{2} & 0 & \frac{3(\Delta t)^2}{2} & 0 & \frac{5(\Delta t)^2}{2} & 0 & \frac{7(\Delta t)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\Delta t)^2}{2} & 0 & \frac{3(\Delta t)^2}{2} & 0 & \frac{5(\Delta t)^2}{2} & 0 & \frac{7(\Delta t)^2}{2} \\ \Delta t & 0 & \Delta t & 0 & \Delta t & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 & \Delta t & 0 & \Delta t & 0 & \Delta t \end{pmatrix}.$$

Vi kan se att matrisen har rangen 4 vilket implicerar att systemet är styrbart.

2.2.2 Observerbarhet

Definition 2.8 (Observerbarhet). Ett tidsdiskret system (2.7) är *observerbart* om det finns ett ändligt $N > 0$ så att starttillståndet \mathbf{x}_0 kan entydigt bestämmas utgående från mätningarna $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{N-1}$.

Frågan är om det finns ett N så att \mathbf{x}_0 kan alltid bestämmas entydigt med hjälp av N stycken mätningar $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{N-1}$? Från lösningen (2.8) ser vi att systemets (2.7) utsignal vid tidpunkt N är

$$\mathbf{y}_N = \mathbf{C}\mathbf{x}_N = \mathbf{C}\mathbf{A}^N\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0 + \dots + \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B}\mathbf{u}_{N-1}.$$

Då styrsignalen är känd kan den, utan att inskränka på allmängiltigheten, antas vara noll och då fås att

$$\mathbf{y}_N = \mathbf{C}\mathbf{A}^N \mathbf{x}_0.$$

Om mätningarna $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{N-1}$ skrivs som en $pN \times 1$ vektor fås att

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0. \quad (2.9)$$

Blockmatrisen framför starttillståndet \mathbf{x}_0 betecknas med $\mathcal{O}_N(\mathbf{C}, \mathbf{A})$.

Sats 2.9. *Det tidsdiskreta systemet (2.7) med $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ och $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ är observerbart om och endast om det gäller för $pn \times n$ observerbarhetsmatrisen*

$$\mathcal{O}_n(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

att

$$\text{rang } \mathcal{O}_n(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = n.$$

Bevis. Om $\text{rang } \mathcal{O}_n(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = n$ så är matrisen injektiv, vilket implicerar att systemet observerbart.

Om systemet är observerbart så gäller att (2.9) har en entydig lösning \mathbf{x}_0 för något $N > 0$, vilket implicerar att matrisen $\mathcal{O}_N(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ är injektiv. Lemma 2.6 ger att $\mathbf{C}\mathbf{A}^{n+k}$ är en linjärkombination av matriserna $\mathbf{C}, \mathbf{C}\mathbf{A}, \dots, \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}$ för varje $k \geq 0$. Då följer att om $N \geq n$ så måste $\mathcal{O}_n(\mathbf{C}, \mathbf{A})$ vara injektiv och har således rangen n . \square

Eftersom systemets observerbarhet är oberoende av matriserna \mathbf{B} och \mathbf{D} , så sägs också att matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) är observerbart.

Anmärkning 2.10. Observera att matriserna $(\mathcal{O}_n(\mathbf{C}, \mathbf{A}))^T = \mathcal{C}_n(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ och $(\mathcal{C}_n(\mathbf{A}, \mathbf{B}))^T = \mathcal{O}_n(\mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T)$. Detta ger att matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) är styrbart om och endast om matrisparet $(\mathbf{B}^T, \mathbf{A}^T)$ är observerbart och matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) är observerbart om och endast om matrisparet $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ är styrbart. Styrbarhet och observerbarhet är alltså *duala* egenskaper för ett linjärt system.

Notera dock att detta betyder inte att ett styrbart system är observerbart, eftersom styrbarhetsmatrisen beror av matrisen \mathbf{B} medan observerbarhetsmatrisen beror av matrisen \mathbf{C} .

Exempel 2.11. Vi undersöker observerbarhetsmatrisen för systemet i exempel 2.3. Systemmatriserna ges av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observerbarhetsmatrisen för detta system är då

$$\mathcal{O}_4(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 1 & 0 & 2\Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\Delta t \\ 1 & 0 & 3\Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3\Delta t \end{pmatrix}.$$

Vi kan se att matrisen har rangen 4 vilket implicerar att systemet är observerbart.

2.2.3 Stabiliserbarhet

Ett system med följande tillståndsekvation kallas ett *autonomt* system

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \tag{2.10}$$

och enligt (2.8) lösningen

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0, \quad k \geq 0. \tag{2.11}$$

Definition 2.12 (Stabilitet). Ett autonomt system (2.10) är (*asymptotiskt*) *stabil* om dess lösning (2.11) uppfyller

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0},$$

för varje val av starttillstånd $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Om detta uppfylls för icke-autonoma system (2.7) med styrsignalen $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ så är också systemet (2.7) stabilt. Då systemet är stabilt sägs också att matrisen \mathbf{A} är stabil.

Om systemet har endast en tillståndsvariabel x så gäller att

$$x_k = \alpha^k x_0$$

och då är detta system stabilt för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ om och endast om $|\alpha| < 1$. För system med flera tillståndsvariabler fås följande resultat enligt [Lue79, s. 155–156].

Sats 2.13. *Systemet (2.7) är asymptotiskt stabilt om och endast om för varje egenvärde λ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ till systemmatrisen \mathbf{A} gäller att $|\lambda_i| < 1$.*

Bevis. Vi visar fallet då \mathbf{A} är diagonaliserbar. Då existerar en inverterbar matris, så att

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1},$$

där $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är egenvärdena till \mathbf{A} . Nu fås att

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}\dots\mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

och då gäller att $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \iff |\lambda_i| < 1$, för varje $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Beviset för fallet då \mathbf{A} inte är diagonaliserbar baserar sig på att \mathbf{A} skrivs istället på *Jordans normalform* och då fås med liknande beräkningar samma resultat. *Stabiliseringsproblemet* går ut på att konstruera en *regulator* som tar systemets (2.7) utsignal som input och ger som output en styrsignal till systemet (2.7), sådant att det ihopkopplade system är stabilt [TSH01, s. 57]. Då systemets tillstånd är tillgängligt, det vill säga matrisen $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ för utsignalen, och regulatorn är statisk, fås en styrsignal av formen $\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}\mathbf{x}_k$ för varje $k = 0, 1, \dots$, där \mathbf{L} är en godtycklig $m \times n$ matris. Denna form av reglering kallas

statisk tillståndsåterkoppling och denna styrsignal tillämpad på systemet (2.7) ger tillståndsekvationen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\mathbf{x}_k. \quad (2.12)$$

Denna ekvation är nu i form av ett autonomt system och kallas också ett *slutet system* eftersom tillståndet återkopplas genom styrsignalen. Stabiliseringsproblemet i detta fall reduceras till att bestämma matrisen \mathbf{L} så att (2.12) är stabil.

Definition 2.14 (Stabiliserbarhet). Matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) kallas *stabiliserbart* om det finns en matris \mathbf{L} , så att matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L}$ är stabil.

Sats 2.15. *Låt matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) vara styrbart. Då gäller att matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) är stabiliserbart.*

Beviset utelämnas men baserar sig på satsen om polplacering [Lue79, s. 299].

2.3 Luenbergerobservatör

Tillståndsåterkopplingen (2.12) kräver att tillståndsvektorn \mathbf{x}_k är känd, men detta är ofta inte fallet. Härnäst kommer en så kallad *observatör* för LTI-system att konstrueras, med avsikten att rekonstruera tillståndsvektorn \mathbf{x}_k utgående från mätningar $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k$ och en given styrsignal \mathbf{u} . Luenbergerobservatören är en deterministisk version av Kalmanfiltret som konstrueras i nästa kapitel.

Konstruktionen av Luenbergerobservatören görs enligt [Åst70, s. 142] på följande sätt. Först skapas ett modellsystem

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \\ \hat{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k, \end{aligned}$$

där $\hat{\mathbf{x}}_k$ betecknar skattningen av tillståndet \mathbf{x}_k . Systemmatriserna är samma som i (2.7) och styrsignalen \mathbf{u} är samma som för det ursprungliga systemet. Om $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0$ så skulle modellens lösning sammanfalla med systemets (2.7) lösning, vilket skulle medföra att $\hat{\mathbf{x}}_k$ är en exakt skattning av tillståndet för varje $k \geq 0$. Problemet är att starttillståndet \mathbf{x}_0 är okänt och endast mätningar $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k$ är tillgängliga som inte beaktas av den ovanstående modellen. Låt $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ beteckna felet mellan skattningen och det verkliga tillståndet. Då ger den så

kallade *innovationen* $\tilde{\mathbf{y}}_k := \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{C}\mathbf{e}_k$ ett mått på hur bra $\hat{\mathbf{x}}_k$ skattar tillståndet \mathbf{x}_k , och detta antyder att tillståndsekvationen har formen

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}_k, \quad (2.13)$$

för någon matris \mathbf{K} . Subtraheras tillståndet (2.13) från systemets tillstånd (2.7) fås *felsystemet*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}_k \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{e}_k. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Om det gäller för felsystemet (2.14) att $\mathbf{e}_k \rightarrow \mathbf{0}$ då $k \rightarrow \infty$, för varje starttillstånd \mathbf{x}_0 och varje val av skattning $\hat{\mathbf{x}}_0$, så kallas (2.13) en *tillståndsobservatör*.

Definition 2.16 (Detekterbarhet). Matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) kallas *detekterbart* om det finns en matris \mathbf{K} , så att matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ är stabil.

Det är alltså möjligt att konstruera en Luenbergerobservatör om och endast om matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) är detekterbart.

Sats 2.17. *Låt matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) vara observerbart. Då gäller att matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) är detekterbart.*

Bevis. Resultatet fås genom dualitet. Enligt anmärkning 3.4 fås att om (\mathbf{C}, \mathbf{A}) är observerbart så är $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ styrbart. Sats 2.15 ger att då är $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ stabiliserbart. Definitionen för stabiliserbarhet säger att det finns en matris \mathbf{K}^T , så att matrisen $\mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{K}^T$ är stabil. Då är också matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ stabil och således enligt definitionen för detekterbarhet är matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) detekterbart. \square

2.3.1 Separationsprincipen

Låt nu styrsignalen till systemet (2.7) vara $\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}_k$, där $\hat{\mathbf{x}}_k$ är skattningen given av observatören (2.13) och är känd eftersom observatören är konstruerad på det sättet. Då blir tillståndsekvationen för det slutna systemet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{L}\hat{\mathbf{x}}_k \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\mathbf{L}(\mathbf{x}_k - \mathbf{e}_k) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{e}_k, \end{aligned} \quad (2.15)$$

där felet \mathbf{e}_k ges av (2.14). Å ena sidan kan matrisen \mathbf{K} bestämmas oberoende av matrisen \mathbf{L} så att skattningen given av observatören konvergerar mot systemets egentliga tillstånd. Å andra sidan kan matrisen \mathbf{L} bestämmas oberoende av matrisen \mathbf{K} så att systemet stabiliseras. Detta kallas för *separationsprincipen* i deterministisk reglerteori och gäller för linjära system [Lue79, s. 307]. Felet (2.14) och tillståndet (2.15) kan skrivas som ett autonomt system

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{e}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L} & \mathbf{B}\mathbf{L} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Egenvärdena för denna matris är precis unionen av egenvärdena för matriserna $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L}$ och $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ och detta slutna system är stabilt då matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) är detekterbart, matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) är stabiliserbart och matriserna \mathbf{K} och \mathbf{L} har valts så att $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L}$ och $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ är stabila.

2.4 Optimal reglering

Det är av intresse att bestämma matriserna \mathbf{K} och \mathbf{L} på ett optimalt sätt. I denna avhandling är huvudintresset stokastiska system, för vilka Kalmanfiltret kan ses som en observatör, varför en explicit konstruktionen av matrisen \mathbf{K} för Luenbergerobservatören utelämnas här.

Med optimal reglering avses att konstruera en *regulator* som styr systemet till origo så att en given kostnad minimeras. Om regulatorns styrsignal är i form av tillståndsåterkoppling $\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}\mathbf{x}_k$, är optimal reglering bestämning av återkopplingsmatrisen \mathbf{L} så att kostnaden minimeras. En *kostnadsfunktional* $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ ger ett skalärt värde på kostnaden att utföra styrningen $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_k\}_{k=0}^{N-1}$, givet starttillståndet \mathbf{x}_0 .

Här används följande kvadratiske kostnadsfunktional

$$J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) := \mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k), \quad (2.17)$$

eftersom den är enkel att hantera matematiskt och är tillräckligt flexibel för många tillämpningar. Denna kostnadsfunktional har en *ändlig tidshorisont* N och \mathbf{S}_N är kostnadsmatrisen för sluttillståndet vid tiden N . Systemets tillstånd beskrivs oftast som en avvikelse från det önskade tillståndet och då ger \mathbf{Q} kostnaden för denna avvikelse. Matriserna \mathbf{S}_N och \mathbf{Q} kan väljas godtyckligt med

restriktionen till positivt semidefinita matriser så att termerna i (2.17) som innehåller dessa matriser är icke-negativa. Matrisen \mathbf{R} är kostnadsmatrisen för styrningen och den väljs så att den är positivt definit, vilket betyder att varje term i 2.17 som innehåller \mathbf{R} är positiv.

Det *linjärkvadratiska reglerproblemet* eller kort *LQ-problemet* (eng. linear-quadratic) går ut på att hitta en reglersignal \mathbf{u} för ett linjärt system (2.7), sådan att den kvadratiska kostnadsfunktionalen (2.17) minimeras.

Följande sats enligt [HRS07, Sats 5.3.1], modifierad för kostnadsfunktionalen (2.17), ger den optimala reglersignalen för deterministiska LTI-system, då vi har tillgång till systemets tillstånd \mathbf{x}_k vid varje tidpunkt k .

Sats 2.18. *Reglersignalen till systemet (2.7), som minimerar kostnadsfunktionalen (2.17), är*

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

där den tidsvarianta återkopplingsmatrisen \mathbf{L}_k ges av

$$\mathbf{L}_k := (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \quad (2.18)$$

och \mathbf{S}_k är lösningen till ekvationen

$$\mathbf{S}_k := \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \quad (2.19)$$

med begynnelsevärdet \mathbf{S}_N i (2.17).

Vidare gäller att minimala kostnaden är

$$\min_{\mathbf{u}} J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0, \quad (2.20)$$

där \mathbf{S}_0 fås ur (2.19).

Anmärkning 2.19. Om tillståndet \mathbf{x}_k inte är tillgängligt vid varje tidpunkt kan enligt separationsprincipen 2.3.1 en Luenbergerobservatör konstrueras om systemet är detekterbart. Då kan skattningen $\hat{\mathbf{x}}_k$ givet av observatören användas för regleringen istället för tillståndet \mathbf{x}_k .

Anmärkning 2.20. De tidsvarierande återkopplingsmatriserna \mathbf{L}_k är oberoende av tillståndet och utsignalen av systemet och kan alltså beräknas på förhand så snart systemmatriserna och kostnadsmatriserna är kända.

För beviset av satsen behövs först två lemman. Det första angående lösningarna till den *dynamiska tidsdiskreta Riccati-ekvationen* (2.19), vilket ofta utelämnas i litteraturen vid konstruktionen av den optimala reglersignalen. Det andra (som också behövs senare i det stokastiska fallet) hjälper med omskrivningen av kostnadsfunktionalen (2.17).

Lemma 2.21. *Låt $\mathbf{S}_N \geq 0$, $\mathbf{Q} \geq 0$ och $\mathbf{R} > 0$. Definiera \mathbf{S}_k genom (2.19) för $0 \leq k \leq N - 1$. Då gäller att $\mathbf{S}_k \geq 0$ för varje $k = 0, \dots, N$.*

Vidare om $\mathbf{Q} > 0$ så är $\mathbf{S}_k > 0$ för varje $k = 0, \dots, N - 1$.

Bevis. Enligt antagandet är $\mathbf{S}_N \geq 0$. Anta nu att $\mathbf{S}_{k+1} \geq 0$ för något $k \leq N - 1$. Då $\mathbf{R} > 0$ så är $(\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) > 0$ och därmed inverterbar, varför (2.19) ger att

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q}.$$

Låt $\mathbf{S}_{k+1}^{1/2}$ vara den positivt semidefinita kvadratroten av \mathbf{S}_{k+1} . Vi kan skriva

$$\mathbf{S}_k = (\mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{A})^\top (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1}^{1/2}) (\mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{A}) + \mathbf{Q}.$$

Då $\mathbf{Q} \geq 0$ gäller att $\mathbf{S}_k \geq 0$ om

$$(\mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{A})^\top (\mathbf{I} - \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1}^{1/2}) (\mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{A}) \geq 0.$$

Eftersom $\mathbf{T}^\top \mathbf{P} \mathbf{T} \geq 0$ om $\mathbf{P} \geq 0$ enligt lemma A.3 räcker det att visa att

$$(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1}^{1/2}) \geq 0.$$

Låt $\mathbf{R}^{1/2}$ vara den positivt definita kvadratroten av \mathbf{R} . Vi kan skriva

$$\begin{aligned} & \mathbf{I} - \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{B} (\mathbf{R}^{1/2})^{-1} ((\mathbf{R}^{1/2})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} (\mathbf{R}^{1/2})^{-1} + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{R}^{1/2})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1}^{1/2}. \end{aligned}$$

Sätt $\mathbf{W} := \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{B} (\mathbf{R}^{1/2})^{-1}$ och då får vi med hjälp av lemma A.1 att

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1}^{1/2} &= \mathbf{I} - \mathbf{W} (\mathbf{W}^\top \mathbf{W} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{W}^\top \\ &= (\mathbf{W} \mathbf{W}^\top + \mathbf{I})^{-1}, \end{aligned}$$

vilket är en positivt definit matris eftersom det är en invers. Då har vi visat att

$$\mathbf{S}_k = (\mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{A})^\top (\mathbf{W} \mathbf{W}^\top + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{S}_{k+1}^{1/2} \mathbf{A}) + \mathbf{Q} \geq 0 \quad (2.21)$$

och enligt induktionsprincipen fås att $\mathbf{S}_k \geq 0$ för varje $k = 0, \dots, N - 1$. Vidare fås att om $\mathbf{Q} > 0$ så ser vi ur (2.21) att $\mathbf{S}_k > 0$ för varje $k = 0, \dots, N - 1$. \square

Lemma 2.22. Låt \mathbf{L}_k och \mathbf{S}_k ges av (2.18) respektive (2.19) och anta att matriserna \mathbf{Q} och \mathbf{S}_N , är positivt semidefinita och \mathbf{R} positivt definit. Då gäller följande likhet

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k)^\top \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_k^\top \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k \\ & = (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bevis. Utveckling av vänstra ledet i (2.22) ger

$$\begin{aligned} VL &= \mathbf{x}_k^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \mathbf{x}_k \\ & \quad + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} \mathbf{u}_k - \mathbf{x}_k^\top \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k \\ &= \mathbf{x}_k^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{S}_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ & \quad + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Lemma 2.21 ger att $\mathbf{S}_k \geq 0$ för varje $k = 0, \dots, N$ och då $\mathbf{R} > 0$ så är $(\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) > 0$ och därmed inverterbar enligt sats A.2. Vi kan nu slå ihop de två sista termerna i (2.23), med användning av (2.18), på följande sätt

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_k^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{u}_k \\ & = \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \mathbf{x}_k) \\ & = \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Vidare gäller att $\mathbf{L}_k^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1}$ enligt reglerna för transponering och det faktum att \mathbf{R} och \mathbf{S}_{k+1} är symmetriska. Då är

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} = \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}). \quad (2.25)$$

Insättning av (2.24) och (2.25) i (2.23) ger att

$$\begin{aligned} VL &= \mathbf{x}_k^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{S}_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^\top \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{u}_k \\ & \quad + \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Om vi nu skriver om (2.19) som

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k,$$

så kan första termen i (2.26) skrivas

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}_k^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{S}_k) \mathbf{x}_k \\
&= \mathbf{x}_k^\top \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - (\mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k) \right) \mathbf{x}_k \\
&= \mathbf{x}_k^\top \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Insättning av (2.27) i (2.26) ger nu att

$$\begin{aligned}
VL &= \mathbf{x}_k^\top \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^\top \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{u}_k \\
&\quad + \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \\
&= \mathbf{x}_k^\top \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \\
&= (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k).
\end{aligned}$$

□

Bevis av Sats 2.18. Vi gör en omskrivning av kostnadsfunktionalen (2.17) enligt följande

$$\begin{aligned}
J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}_N^\top \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \\
&= \mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_{k+1}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^\top \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k) + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \\
&= \mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} ((\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k)^\top \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k) - \mathbf{x}_k^\top \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k).
\end{aligned}$$

Nu kan vi använda lemma 2.22 som ger att

$$J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)$$

och eftersom $(\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) > 0$ så är varje term i summan större än eller lika med noll. Då och endast då styrsignalen väljs som $\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k$ för varje $k = 0, \dots, N-1$ så är varje term i summan lika med noll och vi får att

$$\min_{\mathbf{u}} J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0.$$

□

2.4.1 Oändlig tidshorisont

I vissa tillämpningar kan det vara oklart hur man ska välja tidshorisonten N i kostnadsfunktionalen (2.17), vilket motiverar enligt [HRS07, s. 61] att studera reglerproblemet med en oändlig tidshorisont och följande kostnadsfunktional

$$J_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) := \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}_k^\top \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^\top \mathbf{R} \mathbf{u}_k). \quad (2.28)$$

Minimeringen av denna är meningsfull endast då kostnaden kan göras ändlig och ett tillräckligt villkor för detta är att systemet är stabiliserbart [HRS07, s. 62].

Det visar sig att under vissa villkor kan man approximera problemet för oändlig tidshorisont med problemet för ändlig tidshorisont och låter $N \rightarrow \infty$.

Låt $\mathbf{Q} = \mathbf{H}^\top \mathbf{H}$ för någon $p \times n$ matris \mathbf{H} . Då är Riccatiekvationen (2.19) av formen

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{H}^\top \mathbf{H} - \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \quad (2.29)$$

och enligt följande sats konvergerar lösningen mot ett gränsvärde som är oberoende av valet av \mathbf{S}_N .

Sats 2.23. *Anta att $\mathbf{Q} \geq 0$, $\mathbf{R} > 0$, matrisparet (\mathbf{H}, \mathbf{A}) är detekterbart, där $\mathbf{H}^\top \mathbf{H} = \mathbf{Q}$ och matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) är stabiliserbart. Beteckna lösningen vid tidpunkt $k = 0$ till (2.29) startad från \mathbf{S}_N med $\mathbf{S}_0(\mathbf{S}_N)$ och låt*

$$\mathbf{L}(\mathbf{S}) := (\mathbf{B}^\top \mathbf{S} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S} \mathbf{A}. \quad (2.30)$$

Då gäller följande påståenden:

1. *Det finns en entydig matris $\mathbf{S}_+ \geq 0$, oberoende av \mathbf{S}_N , så att*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{S}_0(\mathbf{S}_N) = \mathbf{S}_+.$$

Matrisen \mathbf{S}_+ satisfierar den algebraiska Riccatiekvationen

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^\top \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^\top \mathbf{S} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S} \mathbf{A} \quad (2.31)$$

och matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{L}(\mathbf{S}_+)$ är stabil. Vidare gäller att om matrisparet (\mathbf{A}, \mathbf{B}) är styrbart så är $\mathbf{S}_+ > 0$.

2. *Reglersignalen till systemet (2.7) som minimerar (2.28) ges av*

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}(\mathbf{S}_+) \mathbf{x}_k$$

och minimala kostnaden är $J_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_+ \mathbf{x}_0$.

Första påståendet finns bevisat i [LR95, Sats 17.5.3, s. 382] och det andra påståendet finns bevisat i [HRS07, Sats 5.3.2, s. 62].

Observera att återkopplingsmatrisen i detta fall är tidsinvariant. Den optimala reglersignalen till systemet (2.7) som minimerar kostnadsfunktionalen (2.28) med oändlig tidshorisont är alltså i form av statisk tillståndsåterkoppling.

Anmärkning 2.24. Om \mathbf{A} är inverterbar så gäller enligt [LR95, Korollarium 13.5.3 s. 326] att bland alla positivt semidefinita lösningar till (2.31) är \mathbf{S}_+ den entydiga lösningen för vilken matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{BL}(\mathbf{S}_+)$ är stabil. Det gäller också att bland alla lösningar \mathbf{S} till (2.31), för vilka matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{BL}(\mathbf{S})$ är stabil, är \mathbf{S}_+ den entydiga positivt semidefinita lösningen. Vidare gäller att \mathbf{S}_+ är den maximala positivt semidefinita lösningen till (2.31) i den mening att för varje $\mathbf{S} \neq \mathbf{S}_+$ som löser (2.31) så gäller att matrisen $\mathbf{S}_+ - \mathbf{S}$ är positivt semidefinit. Inverterbarheten för matrisen \mathbf{A} är inte nödvändig enligt [DGG86].

Kapitel 3

Optimal stokastisk estimering

3.1 Definitioner och antaganden för diskreta stokastiska system

Repetition av grundläggande sannolikhetslära och normalfördelningen för stokastiska vektorer samt notationer och begrepp som används i denna avhandling finns i bilaga B.

Detta kapitel börjar med några definitioner för stokastiska processer enligt [LR95, s. 375] som är viktiga grundläggande definitioner för stokastiska system. Teorin för stokastiska system görs här endast i diskret tid, men en metod för sampling av kontinuerliga system ges i avsnitt 3.4. Ett exempel av samplingen och metoden för estimeringen av tillståndet som går igenom i avsnitt 3.2 presenteras i slutet av kapitlet.

Definition 3.1.

- (i) En *stokastisk process* är en följd $\{\mathbf{v}_k\}_{k \geq 0}$ av stokastiska vektorer, där varje \mathbf{v}_k består av n stycken stokastiska variabler.
- (ii) En stokastisk process sägs vara *vitt brus* om för $j \neq k$ gäller att \mathbf{x}_j och \mathbf{x}_k är oberoende, vilket implicerar att $\text{Cov}(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$ då $j \neq k$.
- (iii) *Gaussiskt vitt brus* är vitt brus, såsom definierat ovan, och varje vektor \mathbf{v}_k är dessutom n -dimensionellt normalfördelad.
- (iv) En stokastisk process sägs ha *väntevärdet noll* om $\mathbb{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$ för varje $k \geq 0$.

Ett *stokastiskt LTI-system* ges av tillståndsmodellen:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k. \quad (3.2)$$

Följande antaganden görs för systemet (3.1)–(3.2):

1. *Processbruset* $\{\mathbf{v}_k\}_{k \geq 0}$ och *mätbruset* $\{\mathbf{w}_k\}_{k \geq 0}$ är gaussiskt vitt brus med väntevärdet noll och givna kovariansmatriser

$$\mathbb{E}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top) = \mathbf{P}_v \geq 0, \quad \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top) = \mathbf{P}_w > 0, \quad \text{för varje } k.$$

2. Processbruset och mätbruset är oberoende processer så att

$$\mathbb{E}(\mathbf{v}_j \mathbf{w}_k^\top) = \mathbf{0}, \quad \text{för varje } j \text{ och } k.$$

3. Starttillståndet \mathbf{x}_0 antas vara normalfördelat med givna väntevärdet \mathbf{m}_0 och kovariansmatrisen $\mathbf{P}_0 > 0$.

4. Matrisen \mathbf{G} antas vara surjektiv.

5. Vidare antas att \mathbf{x}_0 och \mathbf{v}_j är oberoende för varje j samt \mathbf{x}_0 och \mathbf{w}_k är oberoende för varje k .

På samma sätt som för deterministiska system fås att lösningen till (3.1) ges av

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-k} (\mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k), \quad (3.3)$$

men lösningen här är en stokastisk vektor som följd av processbruset. Observera att ekvation (3.2) kan också skrivas

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{f}_k,$$

där $\{\mathbf{f}_k\}_{k \geq 0}$ är gaussiskt vitt brus med väntevärdet noll och kovariansmatrisen $\mathbf{P}_f = \mathbf{G}\mathbf{P}_w\mathbf{G}^\top$.

Lemma 3.2. *Låt \mathbf{x} och \mathbf{v} vara oberoende normalfördelade stokastiska vektorer med kovariansmatriserna $\text{Cov}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_x$ och $\text{Cov}(\mathbf{v}) = \mathbf{P}_v$. Låt \mathbf{A} och \mathbf{F} vara sådana konstanta matriser att multiplikationerna $\mathbf{A}\mathbf{x}$ och $\mathbf{F}\mathbf{v}$ samt summan $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{v}$ är definierade. Då är summan $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{v}$ en normalfördelad stokastisk vektor med väntevärdet $\mathbf{A}\mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}\mathbb{E}(\mathbf{v})$ och kovariansmatrisen*

$$\mathbf{A}\mathbf{P}_x\mathbf{A}^\top + \mathbf{F}\mathbf{P}_v\mathbf{F}^\top.$$

Bevis. Vi kan skriva

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Fv} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

och då \mathbf{x} och \mathbf{v} är oberoende så följer enligt påstående 2 i sats B.20 att $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ är gaussisk och således är $\mathbf{Ax} + \mathbf{Fv}$ gaussisk. Väntevärdet fås direkt på grund av lineariteten av väntevärdet.

Kovariansmatrisen blir, tack vare att \mathbf{x} och \mathbf{v} är oberoende,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left((\mathbf{Ax} + \mathbf{Fv} - \mathbb{E}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Fv})) (\mathbf{Ax} + \mathbf{Fv} - \mathbb{E}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Fv}))^T \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) + \mathbf{F}(\mathbf{v} - \mathbb{E}(\mathbf{v}))) (\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) + \mathbf{F}(\mathbf{v} - \mathbb{E}(\mathbf{v})))^T \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) (\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}))^T \mathbf{A}^T \right) + \mathbb{E} \left(\mathbf{F}(\mathbf{v} - \mathbb{E}(\mathbf{v})) (\mathbf{v} - \mathbb{E}(\mathbf{v}))^T \mathbf{F}^T \right) \\ &= \mathbf{AP}_x \mathbf{A}^T + \mathbf{FP}_v \mathbf{F}^T. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3. Låt \mathbf{x}_n vara tillståndsvektorn, \mathbf{y}_n vara mätsignalen och \mathbf{u}_n vara reglersignalen enligt (3.1)–(3.2) för $n = 0, \dots, k$, där $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k$ är sinsemellan oberoende gaussiska vektorer. Anta att reglersignalen \mathbf{u}_n är en funktion av tillståndet \mathbf{x}_n och mätsignalen \mathbf{y}_n för varje $n = 0, \dots, k$. Då gäller följande påståenden:

1. \mathbf{v}_k är oberoende av \mathbf{x}_n för varje $n = 0, \dots, k$,
2. \mathbf{w}_k är oberoende av \mathbf{x}_n för varje $n = 0, \dots, k$,
3. \mathbf{v}_k är oberoende av \mathbf{y}_n för varje $n = 0, \dots, k$.

Bevis. Lösningen (3.3) ger att vektorn \mathbf{x}_n är en funktion av $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$. Enligt antagandet är $\mathbf{u}_n = f(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ eller med insättning av lösningen (3.3) och ekvation (3.2) en funktion av $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ och \mathbf{w}_n . Upprepad användning av antagandena ger att \mathbf{u}_n är en funktion av $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_n$. Vidare fås också att \mathbf{x}_n är en funktion av $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$. Enligt antagandena fås nu att \mathbf{v}_k är oberoende av \mathbf{x}_n för varje $n = 0, \dots, k$, \mathbf{w}_k är oberoende av \mathbf{x}_n för varje $n = 0, \dots, k$, och då $\mathbf{y}_n = \mathbf{C}\mathbf{x}_n + \mathbf{G}\mathbf{w}_n$ följer att \mathbf{v}_k är oberoende av \mathbf{y}_n för varje $n = 0, \dots, k$. □

Anmärkning 3.4. På grund av lineariteten hos systemet (3.1)–(3.2) och lemmen 3.2 och 3.3 följer att \mathbf{x}_n och \mathbf{y}_n är gaussiska för varje $n \geq 0$. Detta betyder att processerna $\{\mathbf{x}_k\}_{k \geq 0}$ samt $\{\mathbf{y}_k\}_{k \geq 0}$ är gaussiska processer.

3.2 Estimering med Kalmanfiltret

Ofta är bara en del av tillståndsvariablerna tillgängliga och mätningen av dem påverkas dessutom av mätfel eller mätbrus. Detta ger upphov till ett estimeringsproblem att bestämma den bästa skattningen för hela tillståndsvektorn, utgående från den tillgängliga informationen om systemet. Ett nytt sätt att lösa detta problem presenterades av den ungerskfödda amerikanska matematikern Rudolf E. Kalman i sin mycket inflytelserika artikel [Kal60]. Lösningen har senare fått namnet *Kalmanfiltret*.

I denna avhandling ges en tvådelad formel av skattningen, Kalmanprediktorn och Kalmankorrektorn. Idén med uppdelningen är att systemets tillstånd kan estimeras av prediktorn vid varje tidpunkt även om mätningar saknas ibland. Då en ny mätning är tillgänglig ger korrektorn en förbättrad skattning av tillståndet. Prediktorn är en *a priori-skattning* eftersom den bestäms *före* en mätning av det nuvarande tillståndet har gjorts. Korrektorn är en *a posteriori-skattning*.

Skattningen av tillståndet betecknas med $\hat{\mathbf{x}}$ och kan bestämmas enligt olika kriterier. Ett sätt att bestämma skattningen är så att det kvadratiske medelfelet $\mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2)$ minimeras. Detta ger en så kallad *MMSE-skattning* (eng. minimum mean square error) och enligt följande lemma ges denna skattning av det betingade väntevärdet. Lemmat är baserat på den för skalära fallet [Ros10, Proposition 6.1, s. 349] och skrivs här för reellvärda stokastiska vektorer.

Lemma 3.5. *Låt \mathbf{x} och \mathbf{y} vara stokastiska vektorer på samma sannolikhetsrum och låt $\sigma(\mathbf{y})$ vara σ -algebran genererad av \mathbf{y} . Då är*

$$\hat{\mathbf{x}} := \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) \quad (3.4)$$

en $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar stokastisk vektor som uppfyller

$$\min_{\mathbf{z}} \mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2) = \mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2), \quad (3.5)$$

där \mathbf{z} är $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar.

Bevis. För en godtycklig $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar stokastisk vektor \mathbf{z} gäller att

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 &= \|\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) + \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))\|^2 + \|\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\|^2 \\ &\quad + 2(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z})^\top (\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))). \end{aligned}$$

Då är

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2) &= \mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))\|^2) + \mathbb{E}(\|\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\|^2) \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\right)^\top (\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})))\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Vi kan använda tredje egenskapen i sats B.18 för den sista termen

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\right)^\top (\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})))\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\right)^\top (\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))) \mid \sigma(\mathbf{y})\right)\right) \end{aligned}$$

och eftersom $(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z})^\top$ är $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar fås enligt egenskap 5 i sats B.18 att

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\right)^\top (\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))) \mid \sigma(\mathbf{y})\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\right)^\top \mathbb{E}(\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) \mid \sigma(\mathbf{y}))\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\right)^\top (\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) \cdot 1 \mid \sigma(\mathbf{y})))\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbf{z}\right)^\top (\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})))\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Den andra termen i (3.6) är icke-negativ och då fås för varje $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar \mathbf{z} att

$$\mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2) \geq \mathbb{E}(\|\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))\|^2),$$

där likhet gäller då och endast då $\mathbf{z} = \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))$. Således har vi visat påståendet (3.5), det vill säga det betingade väntevärdet (3.4) minimerar det kvadratiske medelfelet. \square

Enligt följande sats gäller att om \mathbf{x} och \mathbf{y} är simultant normalfördelade så är även den betingade fördelningen för \mathbf{x} givet \mathbf{y} gaussisk. Väntevärdet och kovariansmatrisen bestämmer entydigt fördelningen för en gaussisk vektor och dessa ger explicita formler för att beräkna skattningen (3.4) som minimerar det kvadratiske medelfelet.

Sats 3.6. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ vara normalfördelade stokastiska vektorer sådana att deras simultana fördelning är gaussisk. Anta att kovariansmatrisen $\mathbf{P}_{\mathbf{y}} > 0$. Då är den betingade fördelningen för \mathbf{x} givet \mathbf{y} gaussisk och det betingade väntevärdet ges av

$$\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) = \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y})). \quad (3.7)$$

Den betingade kovariansmatrisen är

$$\text{Cov}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) = \mathbf{P}_{\mathbf{x}} - \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1}\mathbf{P}_{\mathbf{y},\mathbf{x}}. \quad (3.8)$$

Bevis. Sätt

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{C}_2\mathbf{y}, \quad (3.9)$$

där \mathbf{C}_1 och \mathbf{C}_2 är konstanta matriser. Då är \mathbf{z} normalfördelad enligt lemma 3.2. Vidare gäller att \mathbf{y} och \mathbf{z} är simultant normalfördelade eftersom

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

och \mathbf{x} och \mathbf{y} antas vara simultant normalfördelade.

Vi vill nu bestämma \mathbf{C}_1 och \mathbf{C}_2 så att \mathbf{y} och \mathbf{z} är oberoende, vilket för normalfördelade vektorer är ekvivalent med att de är okorrelerade enligt påstående 3 i sats B.20. Således

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= \mathbb{E}((\mathbf{z} - \mathbb{E}(\mathbf{z}))(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^T) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\mathbf{C}_1(\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) + \mathbf{C}_2(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))\right)(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^T\right) \\ &= \mathbf{C}_1 \mathbb{E}\left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^T\right) + \mathbf{C}_2 \mathbb{E}\left((\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^T\right) \\ &= \mathbf{C}_1\mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} + \mathbf{C}_2\mathbf{P}_{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Eftersom vi antar att $\mathbf{P}_{\mathbf{y}} > 0$ så kan vi multiplicera med inversen $\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1}$ från höger och får att

$$\mathbf{C}_2 = -\mathbf{C}_1\mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1},$$

där \mathbf{C}_1 kan väljas godtyckligt. Vi kan välja $\mathbf{C}_1 = \mathbf{I}$ och då är $\mathbf{C}_2 = -\mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1}$. Insättning i (3.9) ger att

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1}\mathbf{y} \quad (3.10)$$

är nu en vektor som är oberoende av \mathbf{y} . Vi kan nu bestämma det betingade väntevärdet och kovariansen för vektorn

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y}.$$

Eftersom \mathbf{z} är oberoende av \mathbf{y} och \mathbf{y} är $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar har vi att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) &= \mathbb{E}(\mathbf{z} + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y} \mid \sigma(\mathbf{y})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{z} \mid \sigma(\mathbf{y})) + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbb{E}(\mathbf{y} \mid \sigma(\mathbf{y})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{z}) + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y},\end{aligned}$$

Vidare med insättning av (3.10) fås att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{z}) + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y} &= \mathbb{E}(\mathbf{x} - \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y}) + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y} \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbb{E}(\mathbf{y}) + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y} \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y})),\end{aligned}$$

vilket visar (3.7).

Eftersom \mathbf{z} är bestämd så att $\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ och \mathbf{y} är $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar fås den betingade kovariansmatrisen för \mathbf{x} med hjälp av sats B.18 som

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y})) &= \text{Cov}(\mathbf{z} + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y} \mid \sigma(\mathbf{y})) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{z} \mid \sigma(\mathbf{y})) + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{z} \mid \sigma(\mathbf{y})) \\ &\quad + \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{y} \mid \sigma(\mathbf{y}))\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x} + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\text{Cov}(\mathbf{y} \mid \sigma(\mathbf{y}))\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x} \\ &= \text{Cov}(\mathbf{z} \mid \sigma(\mathbf{y})) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{z}).\end{aligned}$$

Vidare har vi med insättning av (3.10) och enligt lemma B.16 att

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{z}) &= \text{Cov}(\mathbf{x} - \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{y}) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ &\quad - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x} + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\text{Cov}(\mathbf{y})\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x} \\ &= \mathbf{P}_x - \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x} - \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x} + \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_y\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x} \\ &= \mathbf{P}_x - \mathbf{P}_{x,y}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y,x},\end{aligned}$$

vilket visar (3.8). □

Enligt anmärkning 3.4 är tillståndsvektorn \mathbf{x}_k och mätningen $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k$ gaussiska för varje $k \geq 0$. Eftersom mätbruset \mathbf{w}_k är gaussiskt och oberoende av tillståndet \mathbf{x}_k enligt lemma 3.3 så följer att vektorn

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{w}_k \end{pmatrix}$$

är också gaussisk. Tillståndsvektorn \mathbf{x}_k och mätningen \mathbf{y}_k är alltså simultant gaussiska och då är enligt sats 3.6 den betingade fördelningen för \mathbf{x}_k givet \mathbf{y}_k gaussisk. Då en mätning av \mathbf{y}_k har gjorts kan det betingade väntevärdet (3.7) beräknas och kovariansmatrisen fås genom (3.8).

För mängden av tillgänglig information om systemet vid tiden l införs beteckningen \mathcal{Y}_l , vilket innefattar väntevärdet \mathbf{m}_0 och kovariansen \mathbf{P}_0 för starttillståndet \mathbf{x}_0 samt alla *tillgängliga* mätningar \mathbf{y}_i upp till och med tidpunkt l . Observera att för mängden \mathcal{Y}_k behöver det inte gälla att mätningen $\mathbf{y}_k \in \mathcal{Y}_k$. Vid tidpunkt $l = -1$ är endast information om starttillståndet tillgängligt, det vill säga $\mathcal{Y}_{-1} = \{\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0\}$. *A priori*- och *a posteriori*-skattningarna kan nu definieras enligt följande.

Definition 3.7. *Prediktionen* vid tiden k är skattningen av tillståndet \mathbf{x}_k givet informationen \mathcal{Y}_l , där $l < k$, som minimerar det kvadratiske medelfelet $\mathbb{E}(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\|^2)$. Prediktionen betecknas med $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ och ges av det betingade väntevärdet, alltså

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|l} := \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l), \quad l < k. \quad (3.11)$$

Den tillhörande betingade kovariansmatrisen betecknas med

$$\mathbf{P}_{k|l} := \text{Cov}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l), \quad l < k. \quad (3.12)$$

Anmärkning 3.8. Det följer direkt från denna definition att prediktionen av starttillståndet \mathbf{x}_0 är

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \mathbf{m}_0, \quad \mathbf{P}_{0|-1} = \mathbf{P}_0. \quad (3.13)$$

Dessa är startvärden för både prediktorn och korrektorn.

För korrektionen gäller utöver prediktionen att mätningen vid nuvarande tidpunkt är tillgänglig och denna mätning skrivs därför ut explicit i det betingade väntevärdet och kovariansen.

Definition 3.9. *Korrektionen* vid tiden k är skattningen av tillståndet \mathbf{x}_k givet informationen \mathcal{Y}_l , där $l < k$ samt mätningen \mathbf{y}_k , som minimerar det kvadratiska medelfelet $\mathbb{E}(\|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k\|^2)$. Korrektionen betecknas med $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ och ges av det betingade väntevärdet, alltså

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} := \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l, \mathbf{y}_k), \quad l < k. \quad (3.14)$$

Den tillhörande betingade kovariansmatrisen betecknas med

$$\mathbf{P}_{k|k} := \text{Cov}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l, \mathbf{y}_k), \quad l < k. \quad (3.15)$$

För $k \geq 1$ fås följande resultat för prediktionen av tillståndet \mathbf{x}_k som en rekursion.

Sats 3.10 (Kalmanprediktorn). *Låt \mathcal{Y}_l , $l < k$ vara den tillgängliga informationen och $\mathbf{u}_{k-1} = f(\mathcal{Y}_l)$ vara den kända delen av reglersignalen \mathbf{u} i tidsintervallet $[k - 1 - \Delta t, k - 1)$. Vidare låt $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}$ vara en given optimal skattning av tillståndet vid tidpunkt $k - 1$ och $\mathbf{P}_{k-1|l}$ vara den givna tillhörande kovariansmatrisen.*

Då fås prediktionen av tillståndet \mathbf{x}_k , $k \geq 1$, för systemet (3.1) enligt

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|l} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}, \quad l \leq k - 1 \quad (3.16)$$

och den tillhörande betingade kovariansmatrisen ges av

$$\mathbf{P}_{k|l} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|l}\mathbf{A}^\top + \mathbf{F}\mathbf{P}_v\mathbf{F}^\top, \quad (3.17)$$

där \mathbf{P}_v är kovariansmatrisen för processbruset.

Bevis. Det stokastiska LTI-systemets tillståndsekvation (3.1) kan också skrivas

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{F}\mathbf{v}_{k-1} \quad (3.18)$$

och insättning av (3.18) i definitionen för prediktionen (3.11) ger

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|l} &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{F}\mathbf{v}_{k-1} \mid \mathcal{Y}_l) \\ &= \mathbf{A}\mathbb{E}(\mathbf{x}_{k-1} \mid \mathcal{Y}_l) + \mathbf{B}\mathbb{E}(\mathbf{u}_{k-1} \mid \mathcal{Y}_l) + \mathbf{F}\mathbb{E}(\mathbf{v}_{k-1} \mid \mathcal{Y}_l). \end{aligned}$$

Eftersom $\mathbf{u}_{k-1} = f(\mathcal{Y}_l)$ är \mathcal{Y}_l -mätbar och som följd av lemma 3.3 är processbruset \mathbf{v}_{k-1} oberoende av informationen \mathcal{Y}_l så får vi att

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbb{E}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Y}_l) + \mathbf{B} \mathbb{E}(\mathbf{u}_{k-1} | \mathcal{Y}_l) + \mathbf{F} \mathbb{E}(\mathbf{v}_{k-1} | \mathcal{Y}_l) \\ = \mathbf{A} \mathbb{E}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Y}_l) + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{F} \mathbb{E}(\mathbf{v}_{k-1}). \end{aligned}$$

Vidare då $\mathbb{E}(\mathbf{v}_{k-1}) = \mathbf{0}$ och omskrivning med definitionen (3.11) fås

$$\mathbf{A} \mathbb{E}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Y}_l) + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{F} \mathbb{E}(\mathbf{v}_{k-1}) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1},$$

vilket visar (3.16).

Den tillhörande kovariansmatrisen är enligt definitionerna (3.12), (B.9) och (3.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|l} &= \text{Cov}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_k - \mathbb{E}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l)) (\mathbf{x}_k - \mathbb{E}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l))^{\text{T}} | \mathcal{Y}_l \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l}) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l})^{\text{T}} | \mathcal{Y}_l \right) \end{aligned}$$

Med insättning av (3.16) och (3.18) fås att

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l}) (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l})^{\text{T}} | \mathcal{Y}_l \right) \\ = \mathbb{E} \left((\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}) + \mathbf{F} \mathbf{v}_{k-1}) (\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}) + \mathbf{F} \mathbf{v}_{k-1})^{\text{T}} | \mathcal{Y}_l \right). \end{aligned}$$

Användning av lemma 3.3 som säger att \mathbf{v}_{k-1} är oberoende av \mathbf{x}_{k-1} samt av informationen \mathcal{Y}_l ger att

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}) + \mathbf{F} \mathbf{v}_{k-1}) (\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}) + \mathbf{F} \mathbf{v}_{k-1})^{\text{T}} | \mathcal{Y}_l \right) \\ = \mathbf{A} \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}) (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l})^{\text{T}} | \mathcal{Y}_l \right) \mathbf{A}^{\text{T}} + \mathbf{F} \mathbb{E}(\mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}^{\text{T}}) \mathbf{F}^{\text{T}}. \end{aligned}$$

Slutligen ger en omskrivning med hjälp av definitionerna att

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}) (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1|l})^{\text{T}} | \mathcal{Y}_l \right) \mathbf{A}^{\text{T}} + \mathbf{F} \mathbb{E}(\mathbf{v}_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}^{\text{T}}) \mathbf{F}^{\text{T}} \\ = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Y}_l) \mathbf{A}^{\text{T}} + \mathbf{F} \text{Cov}(\mathbf{v}_{k-1}) \mathbf{F}^{\text{T}} \\ = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1|l} \mathbf{A}^{\text{T}} + \mathbf{F} \mathbf{P}_v \mathbf{F}^{\text{T}}, \end{aligned}$$

vilket visar (3.17). □

För att kunna använda prediktionen (3.16) i sats 3.10 för att bestämma korrektionen (3.14) behövs först några hjälpresultat. Följande lemma är enligt [Åst70, Sats 7.3.3, s. 220].

Lemma 3.11. *Låt \mathbf{x} , \mathbf{y}_1 och \mathbf{y}_2 vara simultant normalfördelade stokastiska vektorer. Anta att \mathbf{y}_1 och \mathbf{y}_2 är oberoende och att kovariansmatriserna $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_1}$ och $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_2}$ är positivt definita. Då gäller att*

$$\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}_1) + \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}_2) - \mathbb{E}(\mathbf{x}).$$

Bevis. Låt $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}$, då är $\mathbb{E}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(\mathbf{y}_1) \\ \mathbb{E}(\mathbf{y}_2) \end{pmatrix}$ och vi får att

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^\top \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_1) \\ \mathbf{y}_2 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_2) \end{pmatrix}^\top \right) \\ &= \left(\mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) (\mathbf{y}_1 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_1))^\top \right), \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) (\mathbf{y}_2 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_2))^\top \right) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eftersom \mathbf{y}_1 och \mathbf{y}_2 antas vara oberoende ges kovariansmatrisen för \mathbf{y} av

$$\mathbf{P}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{y}_2} \end{pmatrix},$$

observera att denna matris är inverterbar eftersom vi antar att $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_1} > 0$ och $\mathbf{P}_{\mathbf{y}_2} > 0$. Sats 3.6 ger nu att

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) &= \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{y}_2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_1) \\ \mathbf{y}_2 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_2) \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_1}^{-1} (\mathbf{y}_1 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_1)) + \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_2} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_2}^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_2)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_1}^{-1} (\mathbf{y}_1 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_1)) + \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}_2} \mathbf{P}_{\mathbf{y}_2}^{-1} (\mathbf{y}_2 - \mathbb{E}(\mathbf{y}_2)) - \mathbb{E}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}_1) + \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}_2) - \mathbb{E}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Definiera *skattningsfelet* enligt $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, där skattningen $\hat{\mathbf{x}}$ ges av (3.4). Då kan skattningsfelet för prediktionen respektive korrektionen betecknas med

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} := \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l}, \quad l < k, \quad \text{och} \quad \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} := \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}.$$

Följande hjälpresultat enligt [Åst70, s. 218–220] ger några användbara egenskaper för skattningsfelet, bland annat att skattningsfelet $\tilde{\mathbf{x}}$ är oberoende av mätningen \mathbf{y} .

Lemma 3.12. *Låt \mathbf{x} och \mathbf{y} vara simultant normalfördelade stokastiska vektorer. Låt $\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{y}))$ och $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$. Då gäller att $\tilde{\mathbf{x}}$ och \mathbf{y} är oberoende och att $\tilde{\mathbf{x}}$ och $\hat{\mathbf{x}}$ är oberoende. Vidare gäller att*

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{och} \quad \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}) = \text{Cov}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \mathbf{P}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}.$$

Bevis. Det är klart att $\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})) = \mathbf{0}$. Eftersom \mathbf{x} och \mathbf{y} är simultant gaussiska vektorer så är också $\tilde{\mathbf{x}}$ och \mathbf{y} simultant gaussiska vektorer. Eftersom de är gaussiska räcker det att visa att de är okorrelerade. Kovariansmatrisen för $\tilde{\mathbf{x}}$ och \mathbf{y} blir med insättning av (3.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{y}} &= \mathbb{E} \left(\tilde{\mathbf{x}} (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^{\text{T}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})) (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^{\text{T}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\left(\mathbf{x} - (\mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))) \right) (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^{\text{T}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x})) (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^{\text{T}} \right) - \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1} \mathbb{E} \left((\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y})) (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^{\text{T}} \right) \\ &= \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} - \mathbf{P}_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \mathbf{P}_{\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{y}} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Således är \mathbf{y} och $\tilde{\mathbf{x}}$ oberoende. Eftersom $\hat{\mathbf{x}} = \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ är en funktion av \mathbf{y} enligt egenskap 2 i sats B.18 så följer att $\hat{\mathbf{x}}$ och $\tilde{\mathbf{x}}$ är oberoende. Vidare då $\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ och $\tilde{\mathbf{x}}$ är oberoende av \mathbf{y} fås att

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^{\text{T}}) = \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^{\text{T}} \mid \mathbf{y}) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})) (\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}))^{\text{T}} \mid \mathbf{y} \right) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}). \end{aligned}$$

□

Anmärkning 3.13. Observera att enligt lemma 3.12 fås att kovariansmatriserna för skattningsfelen av prediktionen och korrektionen är lika med kovariansmatriserna (3.12) och (3.15), det vill säga

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}) = \mathbf{P}_{k|l}, \quad \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}) = \mathbf{P}_{k|k}.$$

För en given prediktion $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$, $l < k$, förväntas utsignalen vid tidpunkt k vara $\hat{\mathbf{y}}_{k|l} := \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ och då definieras *innovationen* som

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k|l} := \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_{k|l}, \quad l < k. \quad (3.19)$$

Innovationen är alltså den nya informationen som mätningen \mathbf{y}_k ger till skattningen $\hat{\mathbf{x}}_k$ av tillståndet \mathbf{x}_k [Kay93, s. 395]. Följande hjälpresultat ger några egenskaper för innovationen.

Lemma 3.14. *Låt $\{\mathbf{w}_k\}_{k \geq 0}$ vara gaussiskt vitt brus med väntevärdet noll, $\text{Cov}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{P}_w > 0$ och \mathbf{w}_k är oberoende av \mathbf{x}_0 för varje k . Då gäller för innovationen (3.19) att*

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}) = \mathbf{0}.$$

Givet den tillhörande kovariansmatrisen $\mathbf{P}_{k|l}$ för prediktionen $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$, fås kovariansmatrisen för innovationen som

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}} = \mathbf{C}\mathbf{P}_{k|l}\mathbf{C}^\top + \mathbf{G}\mathbf{P}_w\mathbf{G}^\top \quad (3.20)$$

och denna kovariansmatris är inverterbar då \mathbf{G} antas vara surjektiv. Vidare är $\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}$ oberoende av alla mätningar $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_l$, $l < k$.

Bevis. Med hjälp av ekvationen (3.2) för utsignalen kan vi skriva innovationen (3.19) som

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{k|l} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|l} \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l}) + \mathbf{G}\mathbf{w}_k \\ &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{G}\mathbf{w}_k. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Lemma 3.12 ger att väntevärdet för skattningsfelet $\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}$ är $\mathbf{0}$ och enligt antagandet är $\mathbb{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0}$, då är

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}) = \mathbf{C}\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}) + \mathbf{G}\mathbb{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0}.$$

Enligt lemma 3.3 är \mathbf{w}_k och \mathbf{x}_n oberoende för varje n , $0 \leq n \leq k$, och därmed är \mathbf{w}_k också oberoende av $\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ för varje $l < k$. Då fås kovariansmatrisen för innovationen som

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}} &= \mathbb{E} \left((\tilde{\mathbf{y}}_{k|l} - \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_{k|l})) (\tilde{\mathbf{y}}_{k|l} - \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}))^\top \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{G}\mathbf{w}_k) (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{G}\mathbf{w}_k)^\top \right) \\ &= \mathbf{C} \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} \tilde{\mathbf{x}}_{k|l}^\top) \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top) \mathbf{G}^\top \\ &= \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top. \end{aligned}$$

Vidare ger lemma 3.12 att $\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}$ är oberoende av mätningarna $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_l$ och då följer att innovationen (3.21) också är oberoende av dessa mätningar.

Kovariansmatrisen (3.20) för innovationen är inverterbar eftersom

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\top (\mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top) \mathbf{y} &= (\mathbf{C}^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{P}_{k|l} (\mathbf{C}^\top \mathbf{y}) + (\mathbf{G}^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{P}_w (\mathbf{G}^\top \mathbf{y}) \\ &\geq (\mathbf{G}^\top \mathbf{y})^\top \mathbf{P}_w (\mathbf{G}^\top \mathbf{y}) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

där likhet gäller då och endast då $\mathbf{G}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Då \mathbf{G} är surjektiv gäller detta endast då $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ och det följer att $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}} > 0$ och således inverterbar. \square

Följande resultat ger korrektionssteget för Kalmanfiltret.

Sats 3.15 (Kalmankorrektorn). *För $l < k$, låt $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ vara den optimala skattningen av tillståndet \mathbf{x}_k givet informationen \mathcal{Y}_l och låt $\mathbf{P}_{k|l}$ vara den tillhörande kovariansmatrisen. Dessa ges av Kalmanprediktorn i sats 3.10. Låt \mathbf{y}_k vara en mätning vid nuvarande tidpunkt k . Då ges korrektionen av*

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}, \quad (3.22)$$

där \mathbf{K}_k är Kalmanförstärkningen definierad enligt

$$\mathbf{K}_k := \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top)^{-1} \quad (3.23)$$

och $\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}$ är innovationen (3.19). Den tillhörande kovariansmatrisen är

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l}. \quad (3.24)$$

Bevis. Då prediktionen $\hat{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l)$ är given så bestäms $(\mathcal{Y}_l, \tilde{\mathbf{y}}_{k|l})$ entydigt av $(\mathcal{Y}_l, \mathbf{y}_k)$ enligt $\tilde{\mathbf{y}}_{k|l} = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ och då gäller följande likhet

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbb{E}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l, \mathbf{y}_k) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l, \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}).$$

Lemma 3.14 säger att innovationen $\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}$ är oberoende av informationen \mathcal{Y}_l och kovariansmatrisen $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}}$ är inverterbar. Då kan vi använda lemma 3.11, sats 3.6 och lemma 3.14 för att få

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l, \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}) &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l) + \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mid \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}) - \mathbb{E}(\mathbf{x}_k) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbb{E}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}}^{-1} (\tilde{\mathbf{y}}_{k|l} - \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_{k|l})) - \mathbb{E}(\mathbf{x}_k) \quad (3.25) \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}.\end{aligned}$$

Lemma 3.14 ger kovariansmatrisen $\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}}$ och vi behöver ännu bestämma $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}}$. Vi kan skriva $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l} = \hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \tilde{\mathbf{x}}_{k|l}$ och eftersom $\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}) = \mathbf{0}$ fås att

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}} &= \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_k - \mathbb{E}(\mathbf{x}_k)) \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \tilde{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \tilde{\mathbf{x}}_{k|l})) \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T \right) \quad (3.26) \\ &= \mathbb{E} \left((\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l})) \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T \right) + \mathbb{E} \left((\hat{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_{k|l})) \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T \right).\end{aligned}$$

Enligt lemma 3.14 är $\tilde{\mathbf{y}}_{k|l}$ oberoende av \mathcal{Y}_l och eftersom $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ är en funktion av \mathcal{Y}_l fås att $\mathbb{E} \left((\hat{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_{k|l})) \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T \right) = \mathbf{0}$. Enligt lemma 3.12 är $\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l}) = \mathbf{0}$ och då är

$$\mathbb{E} \left((\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l})) \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T \right) + \mathbb{E} \left((\hat{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbb{E}(\hat{\mathbf{x}}_{k|l})) \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T \right) = \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T). \quad (3.27)$$

Enligt lemma 3.3 är \mathbf{w}_k och \mathbf{x}_n oberoende för varje n , $0 \leq n \leq k$, och därmed är \mathbf{w}_k också oberoende av $\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ för varje $l < k$. Nu fås med insättning av (3.21) i (3.27) att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}^T) &= \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{G}\mathbf{w}_k)^T) \\ &= \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} \tilde{\mathbf{x}}_{k|l}^T) \mathbf{C}^T + \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} \mathbf{w}_k^T) \mathbf{G}^T \quad (3.28) \\ &= \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^T.\end{aligned}$$

Insättning av (3.20) och (3.28) i (3.25) ger att

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^T + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_{k|l} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}.\end{aligned}$$

Den tillhörande kovariansmatrisen blir enligt (3.22), (3.21), lemma 3.12 och an-

märkning 3.13

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k|k} &= \text{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}) \\
&= \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^\top \right) \\
&= \mathbb{E} \left((\mathbf{x}_k - (\hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_{k|l})) (\mathbf{x}_k - (\hat{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_{k|l}))^\top \right) \\
&= \mathbb{E} \left((\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbf{K}_k (\mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{G} \mathbf{w}_k)) (\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbf{K}_k (\mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_{k|l} + \mathbf{G} \mathbf{w}_k))^\top \right) \quad (3.29) \\
&= \mathbb{E} \left(((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbf{w}_k) ((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_{k|l} - \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbf{w}_k)^\top \right) \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbb{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k|l} \tilde{\mathbf{x}}_{k|l}^\top) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top) (\mathbf{K}_k \mathbf{G})^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top \mathbf{K}_k^\top.
\end{aligned}$$

Vidare kan vi förenkla detta uttryck enligt

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top \mathbf{K}_k^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top \mathbf{K}_k^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top \mathbf{K}_k^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} - \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top \mathbf{K}_k^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top \mathbf{K}_k^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top \mathbf{K}_k^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} + (\mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top + \mathbf{K}_k \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top - \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top) \mathbf{K}_k^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} + (\mathbf{K}_k (\mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top) - \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top) \mathbf{K}_k^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l} + (\mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top - \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top) \mathbf{K}_k^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|l},
\end{aligned}$$

vilket visar (3.24). □

Anmärkning 3.16. Observera att

$$\mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} = \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \geq 0$$

och då är

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|l} - \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|l} \leq \mathbf{P}_{k|l}.$$

Den tillhörande kovariansmatrisen för korrektionen är alltså mindre än den tillhörande kovariansmatrisen för prediktionen.

Kovariansmatrisen på sista raden i (3.29) är i *Josephs form* och den är att föredra i numeriska beräkningar eftersom den säkerställer att $\mathbf{P}_{k|k}$ är symmetrisk. Avrundningsfel kan förorsaka att (3.24) inte är positivt definit, vilket krävs av teorin. En anmärkningsvärd egenskap för prediktionen och korrektionen samt deras tillhörande kovariansmatriser är att de kan ges som rekursiva formler, enligt

satserna 3.10 och 3.15. Således behövs alltså endast den föregående optimala skattningen för att beräkna nästa optimala skattning och tidigare skattningar ger ingen ytterligare information. Detta är den så kallade *Markovegenskapen* för stokastiska processer.

3.3 Stationärt Kalmanfilter

Som påpekades i anmärkning 3.8 behövs $\mathbb{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0$ och $\text{Cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{P}_0$ som startvärden för att kunna rekursivt beräkna den optimala skattningen av tillståndet. Under vissa villkor konvergerar kovariansmatrisen och således Kalmanförstärkningen till stationära värden, som är oberoende av startvärdet \mathbf{P}_0 . Den tillhörande kovariansmatrisen för korrektorn enligt (3.24) är

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_{k|k-1}.$$

Med insättning av Kalmanförstärkningen (3.23) fås att

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|k-1}. \quad (3.30)$$

Prediktorns kovariansmatris (3.17) vid tidpunkt $k + 1$ är

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k|k} \mathbf{A}^\top + \mathbf{F} \mathbf{P}_v \mathbf{F}^\top. \quad (3.31)$$

Beteckna $\Sigma_k := \mathbf{P}_{k+1|k}$ och låt $\mathbf{P}_v = \mathbf{J} \mathbf{J}^\top$ för någon $n \times q$ matris \mathbf{J} . Då ger insättning av (3.30) i (3.31) att

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= \mathbf{A} (\mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_{k|k-1}) \mathbf{A}^\top + \mathbf{F} \mathbf{P}_v \mathbf{F}^\top \\ &= \mathbf{A} \Sigma_{k-1} \mathbf{A}^\top + \mathbf{F} \mathbf{J} \mathbf{J}^\top \mathbf{F}^\top - \mathbf{A} \Sigma_{k-1} \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \Sigma_{k-1} \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top)^{-1} \mathbf{C} \Sigma_{k-1} \mathbf{A}^\top. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Detta liknar Riccatiekvationen (2.29) för deterministisk optimal reglering och ett liknande resultat fås för konvergens. Resultatet följer direkt från sats 2.23.

Sats 3.17. *Anta att $\mathbf{P}_v \geq 0$, $\mathbf{P}_w > 0$, \mathbf{G} surjektiv, matrisparet (\mathbf{C}, \mathbf{A}) är detekterbart och matrisparet $(\mathbf{A}, \mathbf{F} \mathbf{J})$ är stabiliserbart, där $\mathbf{J} \mathbf{J}^\top = \mathbf{P}_v$. Beteckna lösningen vid tidpunkt $k = N$ till (3.32), startad från Σ_0 , med $\Sigma_N(\Sigma_0)$ och låt*

$$\mathbf{K}(\Sigma) := \Sigma \mathbf{C}^\top (\mathbf{C} \Sigma \mathbf{C}^\top + \mathbf{G} \mathbf{P}_w \mathbf{G}^\top)^{-1}. \quad (3.33)$$

Då gäller följande påståenden:

Det finns en entydig matris $\Sigma_- \geq 0$, oberoende av Σ_0 , så att

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N(\Sigma_0) = \Sigma_-.$$

Matrisen Σ_- satisfierar den algebraiska Riccatiekvationen

$$\Sigma = \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{F}\mathbf{P}_v\mathbf{F}^T - \mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{P}_w\mathbf{G}^T)^{-1}\mathbf{C}\Sigma\mathbf{A}^T \quad (3.34)$$

och matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}(\Sigma_-)\mathbf{C}$ är stabil. Vidare gäller att om matrisparet $(\mathbf{A}, \mathbf{F}\mathbf{J})$ är styrbart så är $\Sigma_- > 0$.

Eftersom matrisen Σ_- är entydig så kan vi beteckna den tidsinvarianta Kalmanförstärkningen med

$$\mathbf{K} := \mathbf{K}(\Sigma_-) = \Sigma_- \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\Sigma_- \mathbf{C}^T + \mathbf{G}\mathbf{P}_w \mathbf{G}^T)^{-1} \quad (3.35)$$

och det stationära Kalmanfiltret ges av

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{A}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}_k, \quad (3.36)$$

där $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k$. Detta system har en liknande form som Luenbergerobservatören (2.13) och är en tillståndsobservatör till det stokastiska systemet (3.1)–(3.2), det vill säga

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k. \quad (3.2)$$

Skattningsfelet ges av $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$, så felsystemet är

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{A}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{y}}_k) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{F}\mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{K}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{F}\mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{G}\mathbf{w}_k. \end{aligned}$$

Skattningsfelet är alltså ett stokastiskt system med systemmatrisen $\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{C}$ och vitt brus $\eta_k = \mathbf{F}\mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{G}\mathbf{w}_k$ med väntevärdet noll och kovariansen $\mathbf{F}\mathbf{P}_v\mathbf{F}^T + \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{G}\mathbf{P}_w(\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{G})^T$. Om antagandena i sats 3.17 är uppfyllda så är matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{C}$ stabil och då konvergerar det stationära Kalmanfiltrets tillstånd (3.36) mot det stokastiska systemets tillstånd.

Sambandet mellan det stationära Kalmanfiltret och prediktorn samt korrektorn i denna avhandling fås enligt följande. Prediktionen som ges av sats 3.10 är

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k, \quad (3.37)$$

där $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}$ är korrektionen i sats 3.15, det vill säga

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}. \quad (3.38)$$

Insättning av (3.38) i (3.37) ger

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} &= \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k \\ &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_k\tilde{\boldsymbol{y}}_{k|k-1}, \end{aligned}$$

vilket är på formen (3.36), med tidsvariant Kalmanförstärkning. Då villkoren i sats 3.17 är uppfyllda konvergerar \boldsymbol{K}_k mot den tidsinvarianta (3.35).

3.4 Sampling av tidskontinuerliga stokastiska system

Hittills har tidsdiskreta stokastiska system behandlats och hur man bestämmer en optimal skattning av tillståndet baserat på tillgänglig information, så att det kvadratiske medelfelet minimeras. Modellerna för systemen är förstås oftast tidskontinuerliga. Frågan är om ett tidskontinuerligt stokastiskt system kan samplas så att det diskretiserade systemet har samma stokastiska egenskaper som det tidskontinuerliga systemet vid samplingstidpunkterna. Bruset för tidskontinuerliga system modelleras med *Brownisk rörelse*, också kallad *Wienerprocess*.

Definition 3.18. En *Wienerprocess* $\{W_t\}_{t \geq 0}$ i \mathbb{R} på sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uppfyller följande villkor:

1. $W_0 = 0$.
2. För $t > 0$ är $W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$.
3. För $0 \leq t_1 < \dots < t_k$ gäller att inkrementen $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}$ är oberoende.
4. För varje $\omega \in \Omega$ är $t \rightarrow W_t(\omega)$ kontinuerlig.

Definition 3.19. En process $\{\mathbf{W}_t\}_{t \geq 0} := \{(W_t^{(1)} \ W_t^{(2)} \ \dots \ W_t^{(n)})^\top\}_{t \geq 0}$ i \mathbb{R}^n kallas en *n-dimensionell Wienerprocess* om dess komponenter $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \dots, W_t^{(n)}$ är oberoende endimensionella Wienerprocesser.

Definition 3.20. Autokorrelationsfunktionen $\mathbf{r}_\mathbf{X}(t_1, t_2)$ för en stokastisk process $\{\mathbf{X}_t\}_{t \geq 0}$ definieras som

$$\mathbf{r}_\mathbf{X}(t_1, t_2) := \mathbb{E}(\mathbf{X}_{t_1} \mathbf{X}_{t_2}^\top).$$

Om autokorrelationsfunktionen beror endast på skillnaden $\tau = t - s$, $s < t$, skrivs

$$\mathbf{r}_\mathbf{X}(\tau) := \mathbb{E}(\mathbf{X}_s \mathbf{X}_{s+\tau}^\top).$$

Definition 3.21. En tidskontinuerlig stokastisk process $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ är *svagt stationär* om det gäller att

1. $\mathbb{E}(\mathbf{X}_t) = \mu$, för varje $t \in \mathbb{R}$,
2. $\mathbf{r}_\mathbf{X}(t_1, t_2) = \mathbf{r}_\mathbf{X}(t_1 - t_2)$, för varje $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Följande lemma följer direkt från definitionerna.

Lemma 3.22. Låt $\{\mathbf{W}_t\}_{t \geq 0} = \{(W_t^{(1)} \ W_t^{(2)} \ \dots \ W_t^{(n)})^\top\}_{t \geq 0}$ vara en Wienerprocess, där $W_t^{(i)} \sim N(0, \sigma_i^2 t)$. Då är $\{\mathbf{W}_t\}_{t \geq 0}$ en svagt stationär process och det gäller att

$$\mathbf{r}_\mathbf{W}(\tau) = \text{Cov}(\mathbf{W}_\tau) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \tau & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \tau \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\mathbf{W} \tau.$$

Matrisen $\mathbf{P}_\mathbf{W}$ kallas ibland inkrementella kovariansmatrisen för processen \mathbf{W}_t .

En stokastisk differentialekvation är av formen

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t))dt + \mathbf{H}d\mathbf{W}_t, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.39)$$

där \mathbf{W}_t är en Wienerprocess. Lösningen ges av en stokastisk integral, för vilken teorin är omfattande och kan läsas i till exempel [Øks98]. Här ges endast resultatet som diskretiserar systemet, enligt [Åst70, Sats 3.10.1, s. 84], modifierad att också innehålla styrsignalen $\mathbf{u}(t)$ som samplas med nollte ordningens hållkrets på samma sätt som i avsnitt 2.1.1 för deterministiska system.

Sats 3.23. Låt $T > 0$ vara samplingstiden. Då fås att systemets (3.39) tillstånd vid de diskreta tidpunkterna $t_k = kT$, $k = 0, 1, \dots$ är

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d(T)\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d(T)\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k, \quad (3.40)$$

där

$$\mathbf{A}_d(T) := e^{\mathbf{A}T} \quad \text{och} \quad \mathbf{B}_d(T) := \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}.$$

Processen $\{\mathbf{v}_k\}_{k \geq 0}$ är gaussiskt vitt brus med väntevärdet noll och kovariansmatrisen

$$\mathbf{P}_v = \int_0^T \mathbf{A}_d(\tau) \mathbf{H} \mathbf{P}_W \mathbf{H}^T \mathbf{A}_d^T(\tau) d\tau, \quad (3.41)$$

där \mathbf{P}_W är inkrementella kovariansmatrisen för Wienerprocessen \mathbf{W}_t i (3.39).

Exempel 2.1 kan nu utvidgas med störningar. Systemet samplas och sedan kan Kalmanfiltret tillämpas på det diskretiserade systemet för att estimeras positionen.

Exempel 3.24. Låt störningarna vara i form av ändringar i acceleration i x och y riktningar. Då kan tillståndsekvationen i exempel 2.3 skrivas som en stokastisk differentialekvation

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dx_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

där x_1, x_2 är x respektive y positionen, x_3, x_4 är hastigheten i x respektive y riktning och dv_1, dv_2 är störningar. Ekvation (3.42) är på formen

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)dt + \mathbf{H}d\mathbf{V}_t$$

och detta diskretiseras med samplingsperioden Δt . Den diskreta tillståndsekvation för systemet är

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

Sats 3.23 ger att

$$\mathbf{A}_s = e^{\mathbf{A}\Delta t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vilken beräknades redan i exempel 2.3 . Processen $\{\mathbf{v}_k\}_{k \geq 0}$ är gaussiskt vitt brus med väntevärdet noll och kovariansen blir enligt sats 3.23

$$\mathbf{P}_v = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}s} \mathbf{H} \mathbf{P}_V (e^{\mathbf{A}s} \mathbf{H})^T ds.$$

Vi har att

$$e^{\mathbf{A}s} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Låt $\mathbf{P}_V = \begin{pmatrix} \sigma_{v1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 \end{pmatrix}$ vara inkrementella kovariansmatrisen för Wienerprocessen \mathbf{V}_t , då är

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_v &= \int_0^{\Delta t} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{v1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s & 0 & 1 \end{pmatrix} ds \\ &= \int_0^{\Delta t} \begin{pmatrix} \sigma_{v1}^2 s^2 & 0 & \sigma_{v1}^2 s & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 s^2 & 0 & \sigma_{v2}^2 s \\ \sigma_{v1}^2 s & 0 & \sigma_{v1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{v2}^2 s & 0 & \sigma_{v2}^2 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{v1}^2 (\Delta t)^3}{3} & 0 & \frac{\sigma_{v1}^2 (\Delta t)^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{v2}^2 (\Delta t)^3}{3} & 0 & \frac{\sigma_{v2}^2 (\Delta t)^2}{2} \\ \frac{\sigma_{v1}^2 (\Delta t)^2}{2} & 0 & \sigma_{v1}^2 \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{v2}^2 (\Delta t)^2}{2} & 0 & \sigma_{v2}^2 \Delta t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Låt mätbruset vara gaussiskt vitt brus med väntevärdet noll och kovariansmatrisen

$$\mathbf{P}_w = \begin{pmatrix} \sigma_{w1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{w2}^2 \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Den tidsdiskreta modellen av systemet ges nu av

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, & \mathbf{v}_k &\sim N_4(\mathbf{0}, \mathbf{P}_v), \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, & \mathbf{w}_k &\sim N_2(\mathbf{0}, \mathbf{P}_w), \end{aligned}$$

där systemmatriserna ges av

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och kovariansmatriserna ges av (3.43) samt (3.44).

För att se hur estimatet som ges av prediktionen eller korrektionen avviker sig från det verkliga tillståndet och mätningen har detta simulerats med MATLAB. Koden för programmet finns i bilaga C.1. Bilens starttillstånd \mathbf{x}_0 väljs slumpmässigt enligt en normalfördelning med väntevärdet $\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$ och kovariansmatrisen $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$. Varianserna för processbruset och mätbruset antas vara $\sigma_{w1}^2 = \sigma_{w2}^2 = \frac{1}{4}$, $\sigma_{v1}^2 = \sigma_{v2}^2 = 1$ och samplingsintervallet sätts till $\Delta t = \frac{1}{10}$. Då är processbrusets kovariansmatris för det diskretiserade systemet

$$\mathbf{P}_v = \begin{pmatrix} 0.0003 & 0 & 0.0050 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 & 0.0050 \\ 0.0050 & 0 & 0.1000 & 0 \\ 0 & 0.0050 & 0 & 0.1000 \end{pmatrix}.$$

Prediktionen ges av

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1|l}, \quad \mathbf{P}_{k|l} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1|l}\mathbf{A}^T + \mathbf{P}_v$$

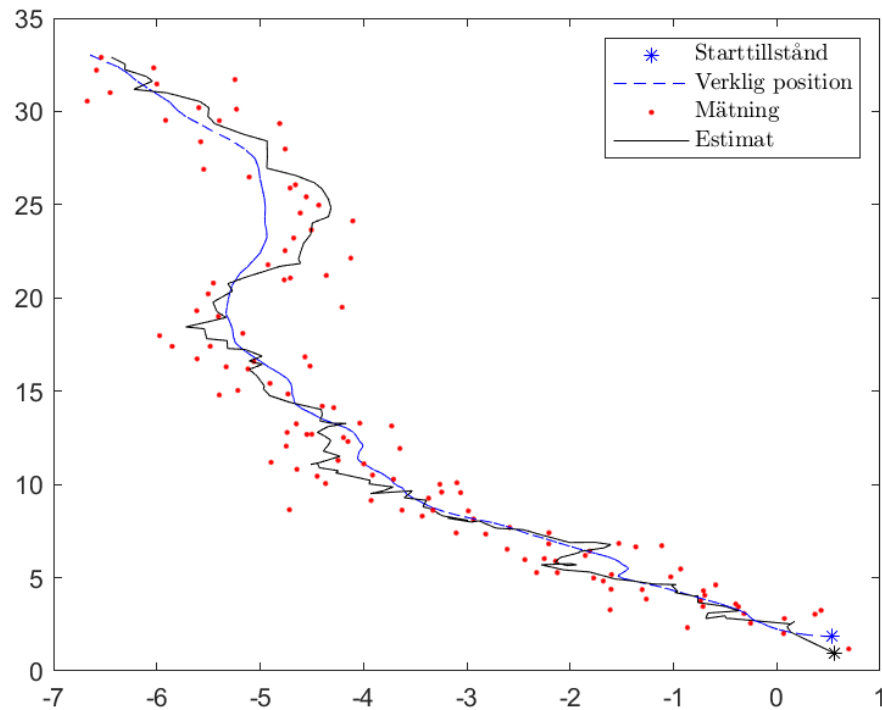
och korrektionen ges av

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}), \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{P}_w)^{-1}, \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{C}\mathbf{P}_{k|k-1}. \end{aligned}$$

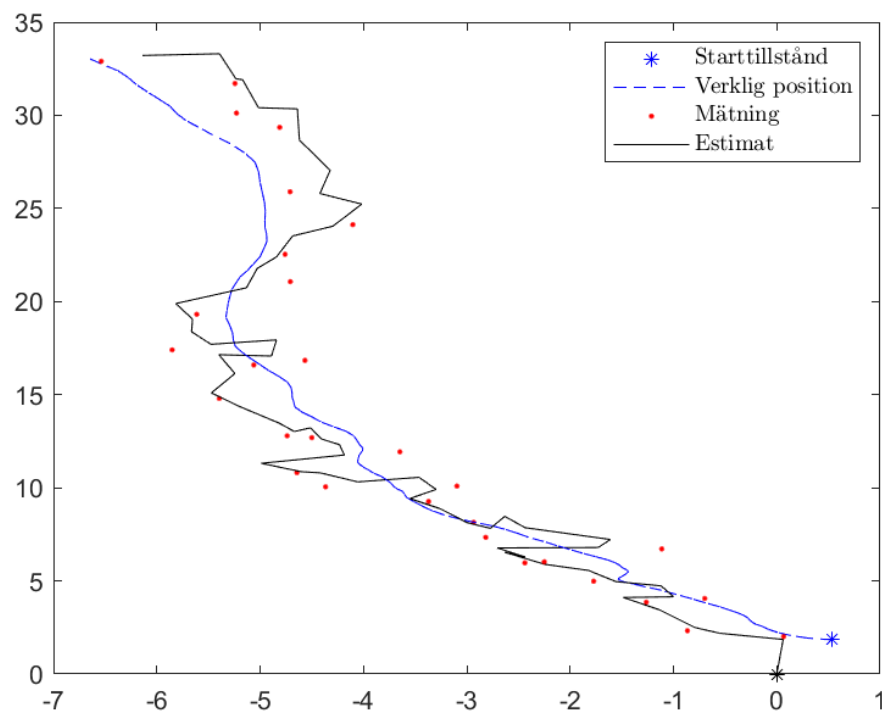
Prediktionen av starttillståndet är

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_{0|-1} = \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}.$$

En simulering med dessa parametrar där mätningen görs vid varje steg och således kan korrektionen användas vid varje steg illustreras i figur 3.1. Användning av samma bana och störningar men mätningar vid var fjärde steg, så att prediktionen används för att estimera positionen vid de övriga tidpunkterna, illustreras i figur 3.2.



Figur 3.1: Simulerad bana, mätningar och skattning av positionen enligt Kalmankorrektorn.



Figur 3.2: Samma bana som figur 3.1, mätningar vid var fjärde steg och skattning av positionen enligt Kalmanprediktorn.

Kapitel 4

Optimal stokastisk reglering

4.1 Reglerproblemet

I avsnitt 2.4 bestämdes den optimala reglersignalen som minimerar den kvadratiske kostnadsfunktionalen (2.17) för det linjära deterministiska systemet (2.7). Motsvarande fundamentala stokastiska reglerproblem är det *linjärkvadratiske gaussiska reglerproblemet* eller *LQG-problemet* (eng. linear-quadratic-Gaussian control problem) för linjära system med vitt brus. Då tillståndsvektorn är stokastisk blir kostnaden (2.17) en stokastisk variabel och kostnadsfunktionalen för stokastiska reglerproblemet väljs att vara väntevärdet av (2.17) och betecknas med

$$l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) := \mathbb{E}(J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})) = \mathbb{E}\left(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k)\right). \quad (4.1)$$

Analogt med deterministiska fallet används här en kostnadsfunktional med ändlig tidshorisont.

För att bestämma den optimala reglersignalen, som minimerar (4.1), är det viktigt att specificera vad som är en *tillåten reglersignal*. Den tillgängliga informationen som används för att reglera systemet är mätningar av systemets tillstånd vid olika tidpunkter, som påverkas av brus. Om $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ och $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ i ekvation (3.2) för mätsignalen så är $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$, det vill säga mätningen ger det exakta värdet på tillståndsvektorn \mathbf{x}_k . I detta fall ger inga andra föregående mätningar någon ytterligare information om tillståndet och då kan den tillåtna reglersignalen vara en funktion av tillståndet, $\mathbf{u}_k = f(\mathbf{x}_k)$, det vill säga regleringen är i form av *tillståndsåterkoppling* och behandlas i avsnitt 4.2.

Vanligtvis är matriserna $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}$ och $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$, det vill säga det exakta värdet på tillståndet är inte tillgängligt. Då ger mängden \mathcal{Y}_k , det vill säga starttillståndets fördelning $(\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0)$ samt tillgängliga mätningar $\mathbf{y}_{j_0}, \dots, \mathbf{y}_{j_i}$, $0 \leq j_0 < \dots < j_i \leq k$, den tillgängliga informationen för systemet vid tidpunkt k . Då kan den tillåtna reglersignalen endast vara en funktion av denna information, det vill säga $\mathbf{u}_k = f(\mathcal{Y}_k)$.

Den optimala skattningen av tillståndet $\hat{\mathbf{x}}_k$, som ges av Kalmanprediktorn i sats 3.10 eller Kalmankorrektorn i sats 3.15, använder också den tillgängliga informationen \mathcal{Y}_k , det vill säga $\hat{\mathbf{x}}_k = g(\mathcal{Y}_k)$. Reglersignaler av formen $\mathbf{u}_k = f(\hat{\mathbf{x}}_k)$ är alltså tillåtna. I detta fall används *återkoppling av det skattade tillståndet* och behandlas i avsnitt 4.3.

Det stokastiska reglerproblemet kan enligt [Åst70, s. 258] formuleras på följande sätt:

Problem 4.1. Hitta en tillåten reglersignal för det stokastiska systemet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k, \quad (3.2)$$

så att den kvadratiske kostnadsfunktionalen

$$l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbb{E} \left(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \right) \quad (4.1)$$

minimeras.

Analogt med deterministiska fallet görs först en omskrivning av uttrycket innanför väntevärdet i kostnadsfunktionalen (4.1) enligt följande lemma [Åst70, Lemma 8.6.1, s. 278].

Lemma 4.2. Anta att $\mathbf{S}_N \geq 0$, $\mathbf{Q} \geq 0$ och $\mathbf{R} > 0$ i (4.1) och låt

$$\mathbf{L}_k = (\mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}, \quad (2.19)$$

för varje $k = 0, \dots, N-1$.

Då gäller att

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) &= \mathbf{x}_0^T \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{v}_k \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \\
&+ 2 \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Bevis. Analogt med beviset av sats 2.18 skriver vi om uttrycket i vänstra ledet av (4.2) med användning av tillståndsekvation (3.1). Då fås att

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) &= \mathbf{x}_0^T \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \\
&= \mathbf{x}_0^T \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{F} \mathbf{v}_k)^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{F} \mathbf{v}_k) \\
&= \mathbf{x}_0^T \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k - \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{x}_k) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k)^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{v}_k \\
&\quad + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k).
\end{aligned}$$

Eftersom $\mathbf{S}_N \geq 0$, $\mathbf{Q} \geq 0$ och $\mathbf{R} > 0$ så är $\mathbf{S}_k \geq 0$ för varje $k = 0, \dots, N$ enligt lemma 2.21. Då ger lemma 2.22 att

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) &= \mathbf{x}_0^T \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{v}_k \\
&+ \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \\
&+ 2 \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k).
\end{aligned}$$

□

De flesta termer i (4.2) är av kvadratisk form och följande lemma enligt [Åst70, Lemma 8.3.3, s. 262] ger en enkel formel för att beräkna väntevärdet av kvadratisk form.

Lemma 4.3. *Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vara en stokastisk vektor med väntevärdet \mathbf{m}_x och kovariansmatrisen \mathbf{P}_x . För en godtycklig matris $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gäller att*

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x}) = \mathbf{m}_x^\top \mathbf{S} \mathbf{m}_x + \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{P}_x).$$

Bevis. Vi har att

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x}) &= \mathbb{E}((\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) + \mathbf{m}_x^\top \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{m}_x - \mathbf{m}_x^\top \mathbf{S} \mathbf{m}_x) \\ &= \mathbb{E}((\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)) + \mathbf{m}_x^\top \mathbf{S} \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top) \mathbf{S} \mathbf{m}_x - \mathbf{m}_x^\top \mathbf{S} \mathbf{m}_x \\ &= \mathbb{E}((\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)) + \mathbf{m}_x^\top \mathbf{S} \mathbf{m}_x. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Eftersom $(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)$ är en skalär så gäller att

$$\mathbb{E}((\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)) = \mathbb{E}\left(\text{tr}\left((\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)\right)\right).$$

Vidare eftersom $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ så är

$$\mathbb{E}\left(\text{tr}\left((\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)\right)\right) = \mathbb{E}\left(\text{tr}\left(\mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top\right)\right).$$

Spåret är summan av diagonalelementen och väntevärdet av en summa är summan av väntevärdena så kan vi byta ordningen på operationerna för väntevärdet och spåret för att få

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\text{tr}\left(\mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top\right)\right) &= \text{tr}\left(\mathbb{E}\left(\mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top\right)\right) \\ &= \text{tr}\left(\mathbf{S} \mathbb{E}\left((\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top\right)\right) \\ &= \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{P}_x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Insättning av (4.4) i (4.3) ger påståendet. \square

Anmärkning 4.4. Observera att lemma 4.3 kan också användas för betingade väntevärdet av kvadratisk form. Om $\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \mathbf{m}_{x|\mathbf{y}}$ och $\text{Cov}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \mathbf{P}_{x|\mathbf{y}}$ så gäller att

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \mathbf{S} \mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \mathbf{m}_{x|\mathbf{y}}^\top \mathbf{S} \mathbf{m}_{x|\mathbf{y}} + \text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{P}_{x|\mathbf{y}}),$$

vilket bevisas på samma sätt som beviset för lemma 4.3.

4.2 Minimering av kostnaden genom tillståndsåterkoppling

I detta avsnitt bestäms reglersignalen som minimerar kostnaden då den tillåtna reglersignalen är en funktion av tillståndet, det vill säga då mätsignalen ger exakta värdet på alla tillståndsvariabler och påverkas inte av något mätbrus.

Följande lemma, som är en omformulering av [Åst70, Lemma 8.3.1, s.260], implicerar att operationen att minimera kostnaden (4.1) med avseende på reglersignaler som är funktioner av tillståndet kommuterar med operationen att ta väntevärdet av kostnaden.

Lemma 4.5. *Anta att den tillåtna reglersignalen är en funktion av tillståndet, $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vidare anta att funktionen $l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ antar ett minsta värde i ett entydigt \mathbf{u} för varje givet värde på den stokastiska vektorn \mathbf{x} .*

Då gäller att

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E} (l(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = \mathbb{E} (\min_{\mathbf{u}} l(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Bevis. För varje tillåten reglersignal $f(\mathbf{x})$ gäller att

$$l(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \geq \min_{\mathbf{u}} l(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

varför enligt (B.11) fås att

$$\mathbb{E} (l(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))) \geq \mathbb{E} (\min_{\mathbf{u}} l(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Minimering av vänstra ledet med avseende på alla tillåtna reglersignaler $f(\mathbf{x})$ ger att

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E} (l(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \geq \mathbb{E} (\min_{\mathbf{u}} l(\mathbf{x}, \mathbf{u})). \quad (4.5)$$

Låt $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ beteckna värdet på \mathbf{u} för vilken $l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ antar sitt minsta värde. Eftersom $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ är en tillåten reglersignal gäller samtidigt att

$$\mathbb{E} (\min_{\mathbf{u}} l(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = \mathbb{E} (l(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x}))) \geq \min_{\mathbf{u}} \mathbb{E} (l(\mathbf{x}, \mathbf{u})). \quad (4.6)$$

Påståendet följer från olikheterna (4.5) och (4.6). \square

Nu kan reglersignalen som minimerar kostnadsfunktionalen (4.1) för det stokastiska systemet med tillståndsekvationen (3.1) bestämmas enligt [Åst70, Sats 8.6.2, s. 281], då det exakta tillståndet är tillgängligt.

Sats 4.6. *Det finns en följd av entydigt bestämda reglersignaler $\mathbf{u}^* = \{\mathbf{u}_k^*\}_{k=0}^{N-1}$, där $\mathbf{u}_k^* = f(\mathbf{x}_k)$ för varje k , till systemet*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{x}_k,\end{aligned}$$

som minimerar kostnadsfunktionalen (4.1). Vidare gäller att

$$\mathbf{u}_k^* = -\mathbf{L}_k\mathbf{x}_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

där \mathbf{L}_k ges av (2.18)–(2.19), som i sats 2.18 för deterministiska fallet. Den minimala kostnaden är

$$\min_{\mathbf{u}} l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{m}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{P}_v),$$

där \mathbf{m}_0 och \mathbf{P}_0 är väntevärdet respektive kovariansmatrisen för \mathbf{x}_0 och \mathbf{P}_v är kovariansmatrisen för processbruset $\{\mathbf{v}_k\}_{k \geq 0}$.

Bevis. Enligt lemma 4.2 är kostnaden (4.1) lika med

$$\begin{aligned}l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbb{E}(\mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}(\mathbf{v}_k^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{v}_k) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)) \\ &\quad + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}(\mathbf{v}_k^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k)).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Låt $\mathbf{u}_k = f(\mathbf{x}_k)$ för någon funktion f . Eftersom \mathbf{v}_k är oberoende av \mathbf{x}_k enligt lemma 3.3 så är också \mathbf{v}_k oberoende av \mathbf{u}_k , vilket ger att

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}(\mathbf{v}_k^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k)) = 0.\tag{4.8}$$

För de övriga termerna kan vi använda lemma 4.3. För det första har vi att

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{x}_0) = \mathbf{m}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0).\tag{4.9}$$

Då $\mathbb{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$ och $\text{Cov}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{P}_v$ fås för det andra att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{v}_k^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{v}_k) &= \mathbb{E}(\mathbf{v}_k)^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbb{E}(\mathbf{v}_k) + \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \text{Cov}(\mathbf{v}_k)) \\ &= \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{P}_v).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Vidare eftersom $(\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) > 0$ så gäller att

$$l_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \geq 0$$

och likhet gäller då och endast då $\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, eller

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k. \quad (4.11)$$

Då har $l_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ ett minsta värde 0 med avseende på \mathbf{u}_k för varje k och \mathbf{u}_k bestäms entydigt för varje värde på \mathbf{x}_k enligt (4.11). Lemma 4.5 ger att

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_k} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right) \\ = \mathbb{E} \left(\min_{\mathbf{u}_k} (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Minimala kostnaden fås med instättning av (4.8), (4.9), (4.10) och (4.12) i (4.7) som

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{m}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{P}_v) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \min_{\mathbf{u}_k} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right) \\ &= \mathbf{m}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{P}_v), \end{aligned}$$

då $\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \mathbf{x}_k$, för varje $k = 0, \dots, N-1$. □

Observera att reglersignalen här är densamma som i deterministiska fallet, det vill säga processbruset påverkar inte valet av reglersignalen ifall systemets tillstånd kan mätas exakt vid varje tidpunkt. Processbruset ger dock upphov till en större minimal kostnad än om systemet inte hade brus, jämför med den minimala kostnaden för deterministisk optimal reglering (2.20).

4.3 Minimering av kostnaden genom återkoppling av det skattade tillståndet

Kalmankorrektorn ger den optimala skattningen $\hat{\mathbf{x}}_k$ av tillståndet \mathbf{x}_k i minstakvadratmening, givet mätningen \mathbf{y}_k och informationen \mathcal{Y}_l , $l < k$. Kalmanprediktorn ger den optimala skattningen $\hat{\mathbf{x}}_k$ av tillståndet \mathbf{x}_k då mätningen \mathbf{y}_k saknas. På basen av den bästa tillgängliga optimala skattningen kan reglersignalen som minimerar kostnadsfunktionalen

$$l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbb{E} \left(\mathbf{x}_N^T \mathbf{S}_N \mathbf{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k) \right) \quad (4.1)$$

bestämmas. Reglersignalen \mathbf{u}_k i detta fall är en funktion av den tillgängliga informationen \mathcal{Y}_k upp till och med tidpunkten k . Enligt lemma 4.2 och ekvationerna (4.9) och (4.10) kan kostnadsfunktionalen (4.1) skrivas som

$$\begin{aligned} l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{m}_0^T \mathbf{S}_0^T \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{P}_v) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right) \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\mathbf{v}_k^T \mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} (\mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k) \right). \end{aligned}$$

Enligt antagandena för processbruset och mätbruset är \mathbf{v}_k oberoende av \mathbf{x}_k som visades i lemma 3.3. Vidare eftersom $\mathbf{u}_k = f(\mathcal{Y}_k)$, det vill säga $\mathbf{u}_k = f(\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k)$, och \mathbf{v}_k är oberoende av \mathbf{y}_n för varje $n = 0, \dots, k$, enligt lemma 3.3, följer att \mathbf{v}_k är oberoende av \mathbf{u}_k . Därmed är alla termer i sista summan lika med noll, det vill säga

$$\begin{aligned} l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{m}_0^T \mathbf{S}_0^T \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F} \mathbf{P}_v) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

För att minimera termerna $\mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^T (\mathbf{B}^T \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right)$ så behövs ett liknande hjälpresultat till lemma 4.5 där minimeringen nu görs med avseende på reglersignaler som är funktioner av det skattade tillståndet. Följande lemma är en omformulering av [Åst70, Lemma 8.3.2, s. 261].

Lemma 4.7. *Anta att den tillåtna reglersignalen är en funktion av mätsignalen, $\mathbf{u} = f(\mathbf{y})$, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vidare anta att funktionen $g(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{y})$ antar ett minsta värde i ett entydigt \mathbf{u} för varje givet värde på den stokastiska vektorn \mathbf{y} .*

Då gäller att

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})) = \mathbb{E}(\min_{\mathbf{u}} g(\mathbf{y}, \mathbf{u})) = \mathbb{E}(\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{y})).$$

Bevis. För varje tillåten reglersignal $f(\mathbf{y})$ gäller att

$$g(\mathbf{y}, f(\mathbf{y})) \geq \min_{\mathbf{u}} g(\mathbf{y}, \mathbf{u}),$$

eller

$$\mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, f(\mathbf{y})) \mid \mathbf{y}) \geq \min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{y}),$$

varför enligt B.11 fås att

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, f(\mathbf{y})) \mid \mathbf{y})) \geq \mathbb{E}(\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{y})),$$

där vänstra ledet kan skrivas med egenskap 3 i sats B.18 som

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, f(\mathbf{y})) \mid \mathbf{y})) = \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, f(\mathbf{y}))).$$

Minimering av vänstra ledet med avseende på alla tillåtna reglersignaler $f(\mathbf{y})$ ger att

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})) \geq \mathbb{E}(\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{y})). \quad (4.14)$$

Låt $\mathbf{u}^*(\mathbf{y})$ beteckna värdet på \mathbf{u} för vilken $g(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ antar sitt minsta värde. Eftersom $\mathbf{u}^*(\mathbf{y})$ är en tillåten reglersignal gäller samtidigt att

$$\mathbb{E}(g(\mathbf{y}, \mathbf{u}^*(\mathbf{y}))) \geq \min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(g(\mathbf{y}, \mathbf{u})),$$

det vill säga

$$\mathbb{E}(\min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) \mid \mathbf{y})) \geq \min_{\mathbf{u}} \mathbb{E}(l(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})). \quad (4.15)$$

Påståendet följer från olikheterna (4.14) och (4.15). \square

Vi kan nu bevisa följande sats som är huvudresultatet i denna avhandling. Satsen är en generalisering av [Åst70, Sats 8.6.3, s.282] och ger lösningen till LQG problemet också ifall mätningar inte görs vid varje tidpunkt.

Sats 4.8. *Det finns en entydig reglersignal $\mathbf{u}^* = \{\mathbf{u}_k^*\}_{k=0}^{N-1}$, där $\mathbf{u}_k^* = f(\mathcal{Y}_k)$ för varje k , till systemet*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{F}\mathbf{v}_k, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{G}\mathbf{w}_k, \quad (3.2)$$

där $\mathbf{x}_0 \sim N_n(\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0)$, $\mathbf{v}_k \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{P}_v)$ och $\mathbf{w}_k \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{P}_w)$, som minimerar kostnadsfunktionalen (4.1).

Reglersignalen ges av

$$\mathbf{u}_k^* = \begin{cases} -\mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, & \text{om } \mathbf{y}_k \in \mathcal{Y}_k, \\ -\mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l}, & \text{om } \mathbf{y}_k \notin \mathcal{Y}_k, \end{cases}$$

där $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ ges av Kalmanprediktorn (3.16) och $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ges av Kalmankorrektorn (3.22). Återkopplingsmatrisen fås som i deterministiska fallet enligt

$$\mathbf{L}_k = (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.18)$$

där \mathbf{S}_k , $k = 0, \dots, N-1$ är lösningen till Riccatiekvationen

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{A}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \quad (2.19)$$

med begynnelsevärdet \mathbf{S}_N , och matriserna $\mathbf{S}_N \geq 0$, $\mathbf{Q} \geq 0$ och $\mathbf{R} > 0$ är givna i kostnadsfunktionalen (4.1).

Vidare är den minimala kostnaden

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{m}_0^\top \mathbf{S}_0 \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

där kovariansmatrisen $\mathbf{P}_{k|l}$ ges av (3.17) för prediktorn om $l < k$ eller av (3.24) för korrektorn om $l = k$ och \mathbf{y}_k är tillgänglig.

Bevis. Låt $f(\mathcal{Y}_l, \mathbf{u}_k) = \mathbb{E}((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) | \mathcal{Y}_l)$, där $\mathbf{u}_k = g(\mathcal{Y}_l)$ och $l \leq k$. Då får vi enligt anmärkning 4.4 att

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) | \mathcal{Y}_l) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbb{E}(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l) \\ &\quad + \text{tr}((\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \text{Cov}(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_l)). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Eftersom \mathbf{u}_k är \mathcal{Y}_l -mätbar ger sats B.18 att

$$\mathbb{E}(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l) = \mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbb{E}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l) = \mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l} \quad (4.18)$$

och

$$\text{Cov}(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l) = \mathbf{L}_k \text{Cov}(\mathbf{x}_k \mid \mathcal{Y}_l) \mathbf{L}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k. \quad (4.19)$$

Nu fås att

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \mid \mathcal{Y}_l \right) \\ = (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l})^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l}) \\ + \text{tr} \left((\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Eftersom $(\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) > 0$ så är

$$(\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l})^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l}) \geq 0,$$

där likhet fås då och endast då $\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l} = \mathbf{0}$, eller

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l}. \quad (4.21)$$

Funktionen $f(\mathcal{Y}_l, \mathbf{u}_k)$ har alltså ett minsta värde med avseende på \mathbf{u}_k för varje k och bestäms entydigt för varje värde på $\hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ enligt (4.21). Vi kan nu använda lemma 4.7 och får att

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_k} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right) \\ = \mathbb{E} \left(\min_{\mathbf{u}_k} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \mid \mathcal{Y}_l \right) \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Insättning av (4.20) i (4.22) ger nu att

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_k} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right) \\ = \mathbb{E} \left(\min_{\mathbf{u}_k} (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l})^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l}) \right) \\ + \text{tr} \left((\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top \right) \\ = \text{tr} \left((\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

där minsta värdet antas då $\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l}$. Vi kan skriva om (4.23) med insättning av \mathbf{L}_k och då $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ får vi att

$$\begin{aligned} \text{tr} \left((\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k \mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top \right) \\ = \text{tr} \left(\mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) \mathbf{L}_k \right) \\ = \text{tr} \left(\mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \right) \\ = \text{tr} \left(\mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Minsta värdet (4.16) på kostnadsfunktionalen (4.1) fås nu enligt (4.13), (4.23) och (4.24) som

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{u}} l_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{m}_0^\top \mathbf{S}_0^\top \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F}) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \min_{\mathbf{u}_k} \mathbb{E} \left((\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k)^\top (\mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{B} + \mathbf{R}) (\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k) \right) \\
&= \mathbf{m}_0^\top \mathbf{S}_0^\top \mathbf{m}_0 + \text{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{P}_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{F}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{F}) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \text{tr}(\mathbf{P}_{k|l} \mathbf{L}_k^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{S}_{k+1} \mathbf{A}),
\end{aligned}$$

då $\mathbf{u}_k = -\mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|l}$ för varje $k = 0, \dots, N-1$ och $l \leq k$. \square

Anmärkning 4.9. Som påpekades i anmärkning 3.16 är den tillhörande kovariansmatrisen för korrektorn mindre än för prediktorn. Detta ger att minsta kostnaden för regleringen fås om mätningar är tillgängliga vid varje tidpunkt, så att korrektorn kan beräknas vid varje steg och den använda reglersignalen beräknas som återkoppling av det skattade tillståndet från korrektorn.

4.4 Optimal reglering av två kopplade elnätverk

Problemställningen med kopplade elnätverk är att reglera referenspunkterna för belastningseffekten på båda nätverken så att frekvensen på nätverken hålls konstant. Det intressanta med kopplade nätverk är att om det ena nätverket utsätts för en stor ändring i belastningen så kommer mera effekt flöda från det ena nätverket till det andra och referenspunkterna behöver ändras för båda nätverken. För regleringen används vanligtvis en PI- eller PID-reglerare, men här används linjärvadratisk reglering, där tillståndsvariablerna för systemet estimeras med Kalmanprediktorn eller Kalmankorrektorn. För teorin om elnätverk och hur ekvationerna nedan beskriver systemet hänvisas läsaren till [Kun94]. Ekvationerna och använda parametrar har tagits ur artiklarna [AA11], [PMH13], [Ros+13] och [Sha+16] som studerats för detta ändamål.

Två kopplade elnätverk beskrivs av följande differentialekvationer:

$$\frac{d\Delta f_i}{dt} = -\frac{1}{T_{Pi}}\Delta f_i - \frac{K_{Pi}}{T_{Pi}}\Delta P_{\text{tie}}^{i,j} + \frac{K_{Pi}}{T_{Pi}}\Delta P_{\text{mech}_i} - \frac{K_{Pi}}{T_{Pi}}\Delta P_{Li}, \quad j \neq i, \quad (4.25)$$

$$\frac{d\Delta P_{\text{mech}_i}}{dt} = -\frac{1}{T_{Ti}}\Delta P_{\text{mech}_i} + \frac{1}{T_{Ti}}\Delta P_{Gi}, \quad (4.26)$$

$$\frac{d\Delta P_{Gi}}{dt} = -\frac{1}{T_{Gi}}\Delta P_{Gi} + \frac{1}{T_{Gi}}\Delta P_{\text{ref}_i} - \frac{1}{T_{Gi}R_i}\Delta f_i \quad (4.27)$$

$$\frac{d\Delta P_{\text{tie}}^{i,j}}{dt} = 2\pi T_{i,j}(\Delta f_i - \Delta f_j), \quad j \neq i, \quad (4.28)$$

där indexen i och j betecknar vilket elnätverk det är. Beteckningen Δ används för att betona att tillståndsvariablerna är avvikelser från det stationära värdet. Parametrarna och variablerna för nätverket förklaras i tabell 4.1.

Parameter	Beskrivning
T_{Pi}	Elsystemets tidskonstant
K_{Pi}	Elsystemets förstärkning
T_{Ti}	Ångturbinens tidskonstant
T_{Gi}	Centrifugalregulatorns tidskonstant
R_i	Ångturbinens reglerparameter
$T_{i,j}$	Kopplingslinans tidskonstant
f_i	Frekvens
P_{mech}	Mekanisk effekt
P_{Li}	Frekvensoberoende belastning
P_{Gi}	Ångturbinens effekt
P_{ref_i}	Referenspunkt för belastningseffekt
$P_{\text{tie}}^{i,j}$	Effektflöde från område i till j

Tabell 4.1: Beskrivning av parametrarna och variablerna för modellen.

Om nätverken antas ha en konstant belastning så är $\frac{d\Delta P_{Li}}{dt} = 0$, små förändringar i belastningen simuleras med processbrus. Tillståndsvektorerna för två nätverk är då

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \left(\Delta f_1 \quad \Delta P_{\text{mech}_1} \quad \Delta P_{G1} \quad \Delta P_{\text{tie}}^{1,2} \right)^T, \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \left(\Delta f_2 \quad \Delta P_{\text{mech}_2} \quad \Delta P_{G2} \quad \Delta P_{\text{tie}}^{2,1} \right)^T. \end{aligned}$$

Eftersom effektflödet för det andra systemet är $\Delta P_{\text{tie}}^{2,1} = -\Delta P_{\text{tie}}^{1,2}$ kan vi kombinera dessa tillståndsvektorer till en tillståndsvektor:

$$\mathbf{x} = \left(\Delta f_1 \quad \Delta P_{\text{mech}_1} \quad \Delta P_{G1} \quad \Delta f_2 \quad \Delta P_{\text{mech}_2} \quad \Delta P_{G2} \quad \Delta P_{\text{tie}}^{1,2} \right)^T. \quad (4.29)$$

Från (4.28) fås att då $\Delta f_1 \rightarrow 0$ och $\Delta P_{\text{tie}}^{1,2} \rightarrow 0$ så $\Delta f_2 \rightarrow 0$. Variablerna som kan regleras är referenspunkterna för belastningseffekten på båda nätverken och då är insignalen $\mathbf{u} = \left(\Delta P_{\text{ref}_1} \quad \Delta P_{\text{ref}_2} \right)^T$. Belastningsförändringar simuleras som processbrus $\mathbf{v} = \left(\Delta P_{L_1} \quad \Delta P_{L_2} \right)^T$. Systemet kan nu skrivas på tillståndsformen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{v}(t),$$

där systemmatriserna fås ur (4.25)–(4.28) som

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{P1}} & \frac{K_{P1}}{T_{P1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{P1}}{T_{P1}} \\ 0 & -\frac{1}{T_{T1}} & \frac{1}{T_{T1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(T_{G1}R_1)} & 0 & -\frac{1}{T_{G1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{P2}} & \frac{K_{P2}}{T_{P2}} & 0 & \frac{K_{P2}}{T_{P2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{T2}} & \frac{1}{T_{T2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{(T_{G2}R_2)} & 0 & -\frac{1}{T_{G2}} & 0 \\ 2\pi T_{1,2} & 0 & 0 & -2\pi T_{1,2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/T_{G1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/T_{G2} & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -K_{P1}/T_{P1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{P2}/T_{P2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Då processbruset modelleras med en Wienerprocess beskrivs systemet av en stokastisk differentialekvation

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)dt + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)dt + \mathbf{H}d\mathbf{V}_t. \quad (4.30)$$

Systemet samplas med perioden T och då fås det diskretiserade systemet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_s\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_s\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k,$$

där matriserna ges enligt sats 3.23 av

$$\mathbf{A}_s = e^{\mathbf{A}T}, \quad \mathbf{B}_s = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}s} ds \right) \mathbf{B}$$

Parameter	Nätverk 1	Nätverk 2
T_{P_i}	20 s	20 s
K_{P_i}	120 Hz/MW	120 Hz/MW
T_{T_i}	0.3 s	0.3 s
T_{G_i}	0.08 s	0.08 s
R_i	2.4 Hz/MW	2.4 Hz/MW

Tabell 4.2: Använda värden på parametrar för simuleringen

och kovariansmatrisen för det diskreta processbruset ges av (3.41)

$$\mathbf{P}_v = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{H} \mathbf{P}_V (e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{H})^T d\tau,$$

där \mathbf{P}_V är inkrementella kovariansmatrisen för Wienerprocessen \mathbf{V}_t i (4.30).

För simuleringen antar vi att $\mathbf{P}_V = 10^{-5} \mathbf{I}$, kopplingslinans tidskonstant är $T_{1,2} = 0.545$ och övriga använda värden på parametrarna för simuleringen hittas i tabell 4.2. Matriserna \mathbf{A}_s , \mathbf{B}_s och \mathbf{P}_v beräknas numeriskt med MATLAB.

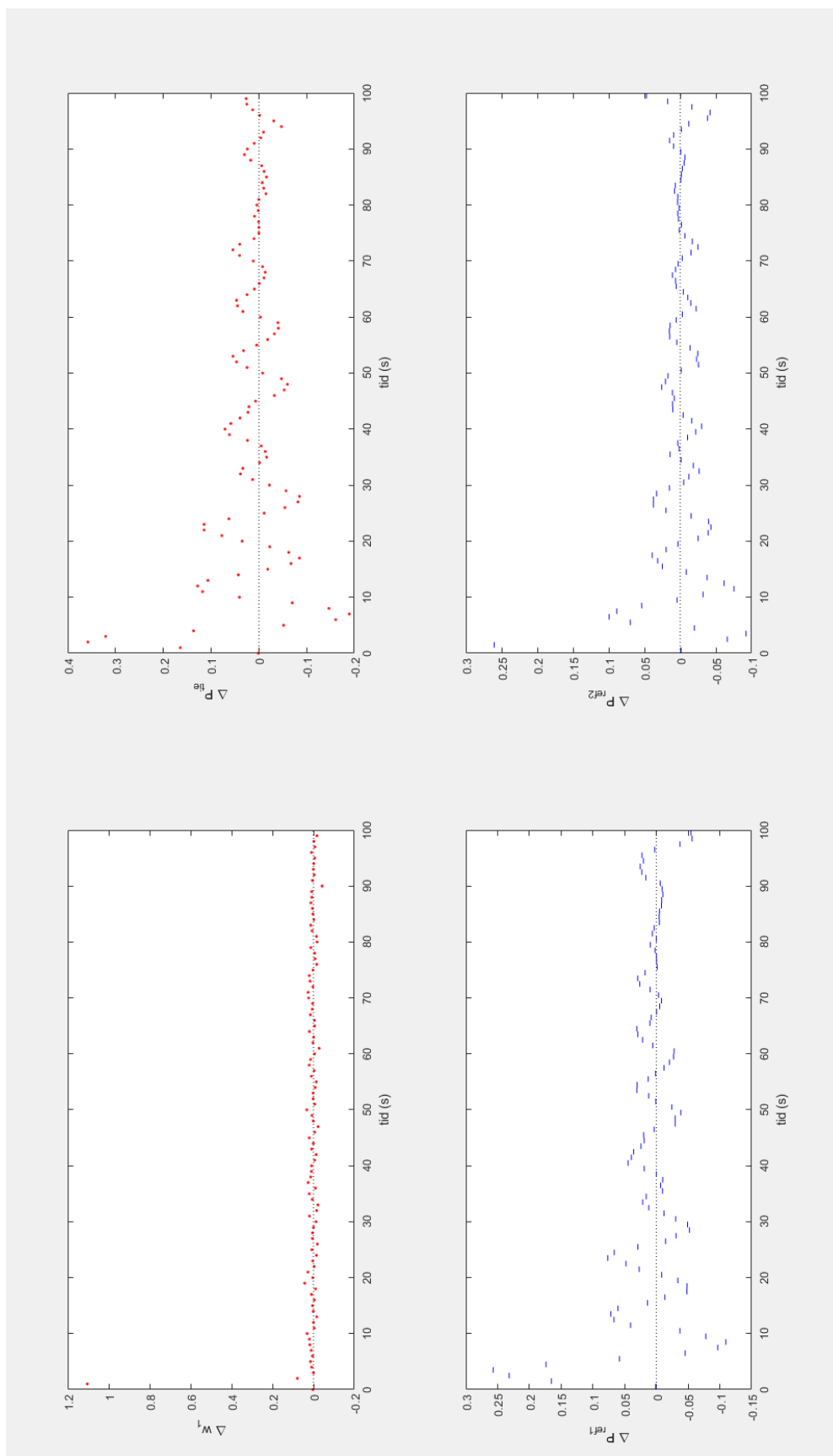
De mätbara variablerna är frekvensen Δf_1 från det första nätverket och effektflödet $\Delta P_{tie}^{1,2}$ mellan nätverken, så att utsignalen är

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

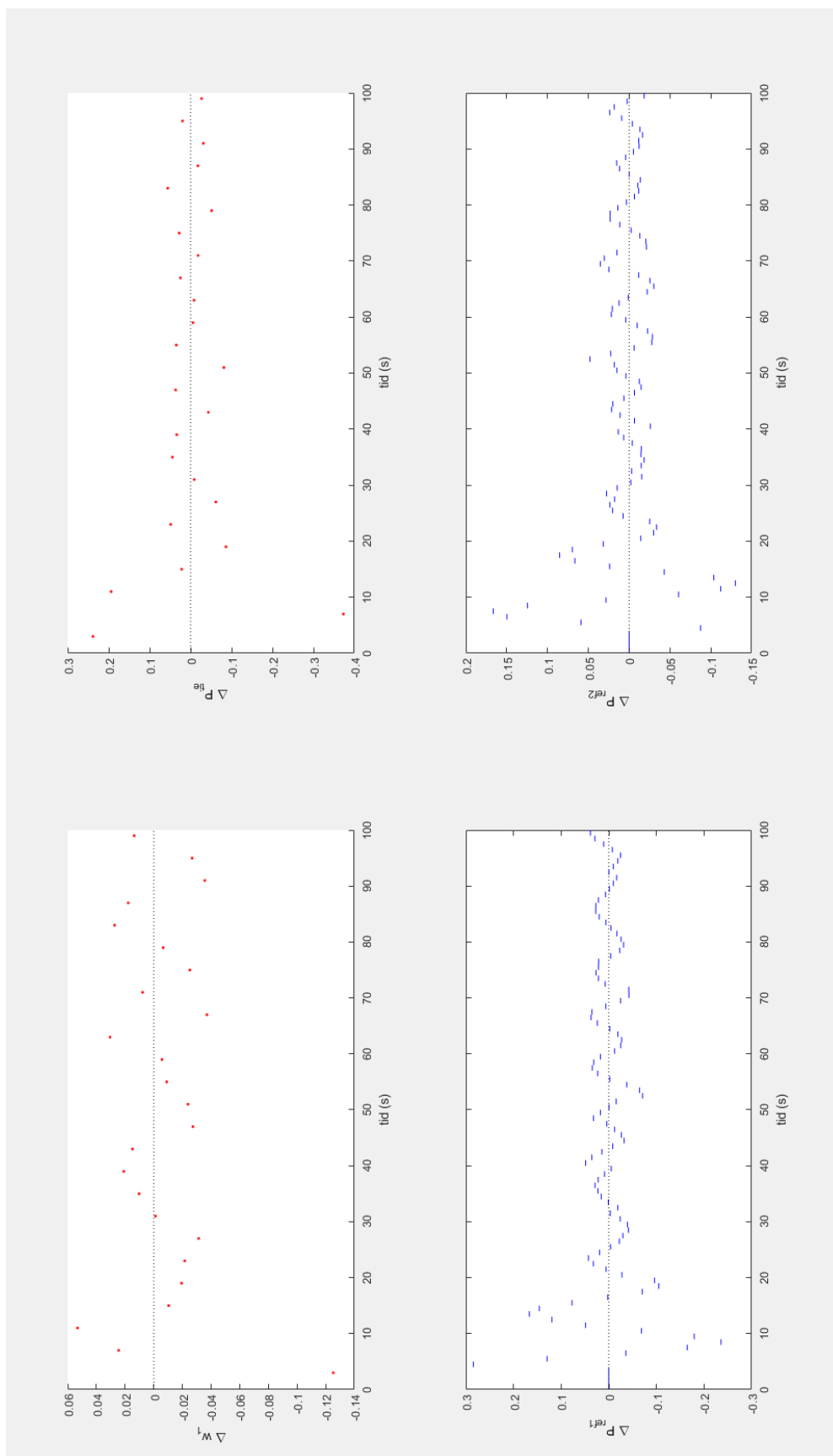
Mätbruset \mathbf{w}_k antas vara vitt brus, med väntevärdet $\mathbf{0}$ och kovariansmatrisen $10^{-5} \mathbf{I}$, oberoende av processbruset. Kostnadsmatriserna väljs enligt $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ och $\mathbf{Q} = 5 \mathbf{C}^T \mathbf{C}$, detta så att kostnaden är endast på de uppmätta tillstånden och är större än kostnaden på regleringen av systemet.

Vi antar att systemet har körts en tid och är i ett stationärt tillstånd. Detta motiverar att starttillståndets väntevärde är $\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$ och stationära tillståndets kovariansmatris kan beräknas med hjälp av sats 3.17 genom att lösa den algebraiska Riccatiekvationen (3.34). Lösningen hittas med MATLAB-funktionen ‘idare’ och denna kovariansmatris används som \mathbf{P}_0 för simuleringen.

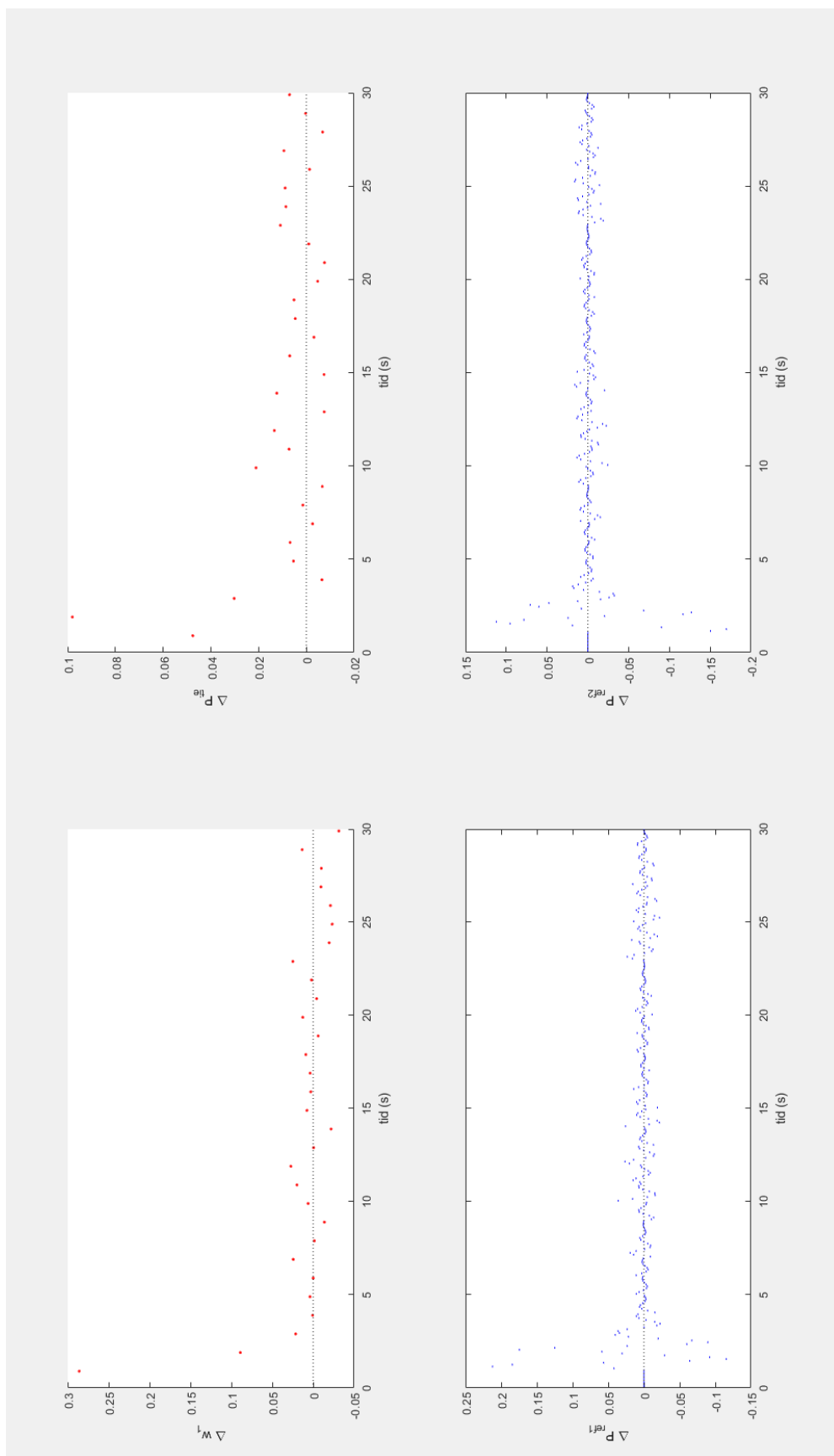
Vi kan nu tillämpa Sats 4.8 för att reglera systemet optimalt. MATLAB-koden för denna simulering hittas i bilaga C.2. Varje simulering görs med en belastningsökning på nätverk 2 vid $t = 1$ s. På figurerna ses mätningen av frekvensen på nätverk 1 uppe till vänster, mätningen av belastningen på kopplingslinan uppe till höger och de nedre graferna är insignalen till respektive nätverk.



Figur 4.1: Mätning varje sekund, samplingstid $T=1s$.



Figur 4.2: Mätning var fjärde sekund, samplings tid $T=1s$.



Figur 4.3: Mätning varje sekund, samplingstid $T=0.1s$.

Kapitel 5

Sammanfattande diskussion

Arbetet betraktade det linjärvadratiska gaussiska reglerproblemet och estimate-ringsproblemet för stokastiska system. Kalmanfiltret som ger den bästa skattning-en av tillståndsvektorn med avseende på det kvadratiska medelfelet delades upp i Kalmanprediktorn och Kalmankorrektorn. En uppdelning av Kalmanfiltret är inte vanligt i litteraturen och därför bestod mycket av arbetet att rigoröst bevisa att prediktorn och korrektorn ger optimala skattningar av tillståndsvektorn gi-vet den tillgängliga informationen om systemet. Speciellt var det nödvändigt att hitta ett sätt att få fram det betingade väntevärdet och kovariansen för gaussis-ka vektorer utan att använda täthetsfunktionen eller fördelningsfunktionen för normalfördelningen vilket man ofta använder som definitioner för normalfördel-ningen. Detta eftersom tillståndsvektorns kovariansmatris kan i vissa fall vara singulär, vilket den inte får vara i täthetsfunktionen.

Behovet av uppdelningen av Kalmanfiltret kommer fram då mätsignalen inte är tillgänglig vid varje tidpunkt men en optimal skattning av tillståndet behövs för regleringen. För att tillämpa den härledda teorin och på något sätt få fram data att optimal reglering fungerar med prediktorn och korrektorn beslöts att använda MATLAB för att simulera reglering av två kopplade elnätverk. Differen-tialekvationerna och parametervärdena som beskriver kopplade elnätverk fram-kom ur artiklarna som användes. Även om MATLAB har färdiga funktioner för att sampla systemet och beräkna Kalmanförstärkningen för att reglera systemet så användes dessa inte eftersom de nödvändigtvis inte är exakt samma som pre-senterats i denna avhandling. Istället finns dessa funktioner i programmet som hittas i bilagan.

Målet med att reglera de kopplade elnätverken är att hålla frekvensen för elnätet stabilt. Simuleringarna gjordes så att det ena elnätverket utsätts för en stor belastningsökning och olika samplingstider och mätintervall undersöktes. Som det framkommer ur figurerna 4.1, 4.2 och 4.3 så fungerar Kalmanprediktorn utmärkt då samplingstiden och därmed reglerintervallet är mycket kortare jämfört med hur ofta en mätning är tillgänglig. Det lönar sig alltså att använda Kalmanprediktorn för att optimalt reglera systemet och att ha en kort samplingstid även om nya mätningar är sällan tillgängliga.

Det är värt att poängtera att under projektets gång framkom det också att om systemet är sådant att man önskar hålla det i ett stationärt tillstånd och vissa villkor för systemmatriserna samt kovariansmatriserna för starttillståndet uppfylls så är det stationära Kalmanfiltret ett utmärkt verktyg för att beräkna kovariansmatrisen för systemet.

Det kan konstateras att samplingen av ett tidskontinuerligt stokastiskt system gicks inte igenom grundligt och endast ekvationen för tillståndsvektorn samplades. Skulle mätsignalen och mätbruset också först modelleras som en stokastisk differentialekvation ger samplingen upphov till att processbruset och mätbruset inte nödvändigtvis är oberoende av varandra efter samplingen. I detta fall behövs också teorin och formlerna för estimeringen och optimala regleringen uppdateras där istället för att ha två olika oberoende processer för störningen i form av processbruset och mätbruset används endast en störningsprocess. Detta görs delvis i [HRS07] men där är Kalmanfiltret inte uppdelat. Det kunde också vara intressant att undersöka hur teorin kunde utvecklas då mätsignalen ger information om olika tillståndsvariabler vid olika tidpunkter.

Bilaga A

Matristeori

A.1 Matrisalgebra

Låt \mathbf{A} vara en $m \times n$ matris med reella element a_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

huvuddiagonalen för matrisen \mathbf{A} ges av elementen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{qq}$, där $q = \min(m, n)$.

Transponatet av matrisen \mathbf{A} betecknas med \mathbf{A}^T och är en $n \times m$ matris med elementen a_{ji} .

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

För de reella matriserna \mathbf{A} och \mathbf{B} gäller att

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

En *kvadratisk* matris är en matris för vilken $m = n$, det vill säga den har lika många rader som kolonner. En kvadratisk matris är *symmetrisk* om $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. En *diagonalmatris* är en kvadratisk matris för vilken gäller att alla element utanför huvuddiagonalen är nollor. *Identitetsmatrisen* \mathbf{I} är en diagonalmatris, där alla element på huvuddiagonalen är ettor. En matris \mathbf{A} är *ortogonal* om $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Rangen av en $m \times n$ matris \mathbf{A} anger hur många linjärt oberoende rader eller kolonner matrisen har. Det gäller alltid att

$$\text{rang } \mathbf{A} \leq \min(m, n)$$

och om $\text{rang } \mathbf{A} = \min(m, n)$ så sägs matrisen ha *full rang*. Om $\text{rang } \mathbf{A} = m$ så är matrisen *surjektiv* och om $\text{rang } \mathbf{A} = n$ så är matrisen *injektiv*.

En $n \times n$ matris \mathbf{A} är *inverterbar* om det finns en $n \times n$ matris \mathbf{A}^{-1} , sådan att $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ och $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, det vill säga \mathbf{A}^{-1} är både en *vänsterinvers* och en *högerinvers* till matrisen \mathbf{A} . Inversen \mathbf{A}^{-1} är entydig då den existerar. För inverterbara matriser \mathbf{A} och \mathbf{B} gäller att

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad \text{och} \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Lemma A.1. *Låt $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vara godtyckliga matriser. Då är $\mathbf{ST} + \mathbf{I}$ inverterbar om och endast om $\mathbf{TS} + \mathbf{I}$ är inverterbar och det gäller att*

$$(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{TS} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{T}.$$

Bevis. Anta att $\mathbf{ST} + \mathbf{I}$ är inverterbar och sätt $\mathbf{U} = \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{S}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} (\mathbf{TS} + \mathbf{I})\mathbf{U} &= (\mathbf{TS} + \mathbf{I})(\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{S}) \\ &= \mathbf{TS} - \mathbf{TST}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{S} + \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{S} \\ &= \mathbf{TS} + \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{S} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{TS} + \mathbf{I}) &= (\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{S})(\mathbf{TS} + \mathbf{I}) \\ &= \mathbf{TS} + \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{STS} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{S} \\ &= \mathbf{TS} + \mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{ST} + \mathbf{I})\mathbf{S} \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Således är \mathbf{U} inversen av $\mathbf{TS} + \mathbf{I}$. Analogt fås att då $\mathbf{TS} + \mathbf{I}$ är inverterbar så är $\mathbf{ST} + \mathbf{I}$ inverterbar och inversen ges av $\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{TS} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{T}$. \square

Spåret av en $m \times n$ matris \mathbf{A} , vilket betecknas $\text{tr}(\mathbf{A})$, är summan av huvud-diagonalelementen

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + \dots + a_{qq},$$

där $q = \min(m, n)$. Det är klart att $\text{tr}(\mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{A})$ och $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$. Dessutom gäller att

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}), \quad (\text{A.1})$$

ifall multiplikationerna \mathbf{AB} och \mathbf{BA} är definierade.

Låt \mathbf{A} vara symmetrisk och $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ då är funktionen

$$Q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

en *kvadratisk form*. Matrisen \mathbf{A} sägs vara *positivt semidefinit*, vilket betecknas $\mathbf{A} \geq 0$, om den är symmetrisk och det gäller att kvadratiska formen är icke-negativ för varje vektor \mathbf{x} , det vill säga

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}.$$

Om det även gäller att

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

så sägs \mathbf{A} vara *positivt definit*, vilket betecknas $\mathbf{A} > 0$.

Sats A.2. *En positivt semidefinit matris \mathbf{A} är positivt definit om och endast om \mathbf{A} är inverterbar.*

Se [HJ12, Korollarium 7.1.7, s. 431] för bevis.

Lemma A.3. *Låt \mathbf{P} vara en positivt semidefinit $n \times n$ matris och låt \mathbf{T} vara en $n \times m$ matris. Då är $\mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T}$ positivt semidefinit.*

Bevis. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ och $\mathbf{y} = \mathbf{T} \mathbf{x}$. Då gäller att

$$\mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{y} \geq 0.$$

□

Lemma A.4. *Låt \mathbf{A} vara en positivt (semi)definit matris. Då finns en entydig positivt (semi)definit kvadratrot av \mathbf{A} , vilket betecknas $\mathbf{A}^{1/2}$, sådan att $\mathbf{A}^{1/2} \mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{A}$.*

Lemmat är ett specialfall av [HJ12, Sats 7.2.6, s. 439].

A.2 Matrisexponentialfunktionen

Matrisexponentialfunktionen är en funktion för kvadratiska matriser och definieras med hjälp av Taylorutvecklingen för den skalära exponentialfunktionen enligt

$$e^{\mathbf{A}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2 + \dots, \quad (\text{A.2})$$

där \mathbf{A} är en godtycklig kvadratisk matris. Definitionen är meningsfull om matrisserien (A.2) konvergerar. Detta visas med hjälp av *matrisnormen*, som definieras enligt

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{A}\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}.$$

Lemma A.5. *Följande egenskaper gäller för matrisnormen:*

1. $|\mathbf{A}\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot |\mathbf{x}|$,
2. $|a_{jk}| \leq \|\mathbf{A}\|$ för alla matriselement a_{jk} ,
3. $\|\mathbf{A}\| \leq \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}$,
4. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
5. $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$,
6. $\|t\mathbf{A}\| = |t| \|\mathbf{A}\|$ ($t \in \mathbb{C}$).

För bevis se [AB89, Lemma 2.2, s. 90].

Från egenskaperna 5. och 6. fås nu att

$$\left\| \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \right\| \leq \left| \frac{t^k}{k!} \right| \|\mathbf{A}\|^k,$$

där högra ledet är en term i en konvergent serie. Det följer att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} \right\| < \infty,$$

vilket visar att matrisserien (A.2) är konvergent.

Sats A.6. *Följande egenskaper gäller för matrisexponentialfunktionen:*

1. $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$ om $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$,

2. $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$,

3. $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$, $t \in \mathbb{R}$.

För bevis se [AB89, Sats 2.2, s. 93], likheten $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$ i egenskap 3. följer från definitionen (A.2).

Som följd av egenskap 1. och definitionen (A.2) fås, då $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, att

$$e^{\mathbf{A}} \cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I},$$

det vill säga $e^{\mathbf{A}}$ och $e^{-\mathbf{A}}$ är varandras inverser.

Bilaga B

Sannolikhetssteori

Som källa till det här kapitlet har i huvudsak [JP03], [Ros10] och [DV85] använts.

B.1 Grundläggande sannolikhetslära

Låt Ω vara en icke-tom mängd med elementen ω . Mängden Ω kallas *utfallsrummet*

Definition B.1. En familj \mathcal{A} av delmängder av Ω sägs vara en σ -algebra över mängden Ω om det gäller att

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Elementen A_i i σ -algebran \mathcal{A} kallas *händelser*.

Definition B.2. En avbildning $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ sägs vara ett *sannolikhetsmått* på σ -algebran \mathcal{A} om det gäller att

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$, då $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ och $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Sannolikhetsmåtten ger sannolikheten för varje händelse $A_i \in \mathcal{A}$.

Definition B.3. Ett *sannolikhetsrum* ges av trippeln $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, där Ω är en icke-tom mängd, \mathcal{A} är σ -algebran av delmängder av Ω och \mathbb{P} är sannolikhetsmåtten på \mathcal{A} .

Definition B.4. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum. En avbildning

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

sägs vara en *stokastisk variabel* om för varje $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

och då sägs X vara en *mätbar* funktion med avseende på σ -algebran \mathcal{A} .

Låt $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vara en stokastisk variabel. Då är

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

en σ -algebra och kallas *σ -algebran som genereras av X* . Det är den minsta σ -algebran som X är mätbar med avseende på.

B.1.1 Väntevärde och varians

Definition B.5. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och X en stokastisk variabel. *Väntevärdet* av X ges av

$$\mathbb{E}(X) := \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

För att väntevärdet ska existera krävs att

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} < \infty$$

och då sägs X vara *integrerbar*.

Variansen för X ges av

$$\text{Var}(X) := \int_{\Omega} (X - \mathbb{E}(X))^2 d\mathbb{P}.$$

Notera att

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \quad (\text{B.1})$$

och om X^2 är integrerbar, det vill säga $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, så är $\text{Var}(X)$ väldefinierat.

Väntevärdet är en linjär avbildning, det vill säga för stokastiska variablerna X och Y och ett tal $\beta \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\mathbb{E}(\beta X) = \beta \mathbb{E}(X) \quad \text{och} \quad \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

Om X och Y är integrerbara stokastiska variabler, sådana att $X \leq Y$, så gäller att

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

B.1.2 Fördelningsfunktion

Definition B.6. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och låt $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vara en stokastisk variabel. *Fördelningsfunktionen för X* är funktionen $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ och bestäms av

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{för varje } x \in \mathbb{R}.$$

Om $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är stokastiska variabler ges deras *simultana fördelningsfunktion* av $F_{X_1, \dots, X_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ genom

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad \text{för varje } x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

Definition B.7. Låt $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vara en stokastisk variabel och låt F_X vara fördelningsfunktionen för X . Om det existerar en icke-negativ, integrerbar funktion $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sådan att

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du,$$

så sägs f_X vara *tätheten* för X .

Lemma B.8. Låt $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vara en integrerbar stokastisk variabel med täthetsfunktionen f_X . Låt $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $Y = g(X)$. Då gäller att

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} g(u) f_X(u) du.$$

Speciellt fås att

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} u f_X(u) du \quad \text{och} \quad \text{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} (u - \mathbb{E}(X))^2 f_X(u) du.$$

Normalfördelningen

Den stokastiska variabeln $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ är *normalfördelad* eller *gaussisk* med parametrarna $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$, vilket betecknas med $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, om den har tätheten

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Om det dessutom tillåts att $\sigma = 0$ sägs X vara *singulärt normalfördelad* och då har X ingen täthet.

Det gäller att väntevärdet och variansen för en normalfördelad stokastisk variabel ges av

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{Var}(X) = \sigma^2,$$

vilket kan verifieras med hjälp av lemma B.8. Dessa parametrar bestämmer entydigt fördelningen för en normalfördelad stokastisk variabel.

B.1.3 Oberoende stokastiska variabler

Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och $A, B \in \mathcal{A}$ är händelser med $\mathbb{P}(B) > 0$. Den *betingade sannolikheten* för händelsen A givet händelsen B ges av

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \quad (\text{B.2})$$

Man kan visa att $\mathbb{P}(A | B)$ är ett sannolikhetsmått.

Definition B.9. Händelserna A och B sägs vara *oberoende* om

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Om A och B är oberoende händelser fås att

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Definition B.10. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum.

1. Låt $(\mathcal{A}_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{A}$ vara σ -algebror. Då sägs \mathcal{A}_i vara *oberoende σ -algebror* om för varje ändlig indexmängd $J \subset I$ och varje händelse $A_i \in \mathcal{A}_i$ gäller att

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

2. Stokastiska variabler $(X_i)_{i \in I}$ sägs vara *oberoende stokastiska variabler* om $\sigma(X_i)$ är oberoende σ -algebror.

Sats B.11. Låt f, g vara integrerbara funktioner och X, Y stokastiska variabler. Då gäller att $f(X)$ och $g(Y)$ är oberoende och

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y)). \quad (\text{B.3})$$

Definition B.12. *Kovariansen* mellan två stokastiska variabler X och Y med ändliga varianser definieras enligt

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \quad (\text{B.4})$$

Om $\text{Cov}(X, Y) = 0$ så sägs X och Y vara *okorrelerade*.

Då X och Y är oberoende så gäller enligt (B.3) att $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ och således är oberoende stokastiska variabler också okorrelerade, men omvändningen gäller vanligtvis inte.

B.1.4 Betingat väntevärde

Definition B.13. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och låt X och Y vara stokastiska variabler på Ω . Det *betingade väntevärdet av X givet Y* är en $\sigma(Y)$ -mätbar stokastisk variabel, betecknad

$$\mathbb{E}(X | Y),$$

sådan att

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X | Y) d\mathbb{P} \quad \text{för varje } A \in \sigma(Y).$$

Definition B.14. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och X en integrerbar stokastisk variabel på Ω . Låt $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ vara en σ -algebra. Det *betingade väntevärdet*

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{V})$$

är en \mathcal{V} -mätbar stokastisk variabel på Ω , för vilken det gäller att

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(X | \mathcal{V}) d\mathbb{P} \quad \text{för varje } A \in \mathcal{V}.$$

Från definitionerna ser man att

$$\mathbb{E}(X | Y) = \mathbb{E}(X | \sigma(Y)).$$

Nedan följer viktiga resultat för det betingade väntevärdet. För bevis av resultaten, se [JP03, Kapitel 23, s. 197-207].

Sats B.15. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum. Låt X och Y vara integrerbara stokastiska variabler på Ω och $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ är en σ -algebra. Följande påståenden gäller

1. *Avbildningen $X \rightarrow \mathbb{E}(X | Y)$ är linjär.*
2. *Det finns en funktion f , sådan att $\mathbb{E}(X | Y) = f(Y)$.*
3. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | Y)) = \mathbb{E}(X)$.
4. $\mathbb{E}(X | Y) = \mathbb{E}(X)$ om X och Y är oberoende.
5. $\mathbb{E}(XY | \mathcal{V}) = X \mathbb{E}(Y | \mathcal{V})$ om XY är integrerbar och X är \mathcal{V} -mätbar.
6. För konstanter $a, b \in \mathbb{R}$ gäller att $\mathbb{E}(aX + bY | \mathcal{V}) = a \mathbb{E}(X | \mathcal{V}) + b \mathbb{E}(Y | \mathcal{V})$.

7. Olikheten $X \leq Y$ implicerar att $\mathbb{E}(X | \mathcal{V}) \leq \mathbb{E}(Y | \mathcal{V})$.

Betingade variansen för X givet Y definieras enligt

$$\text{Var}(X | Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X | Y))^2 | Y)$$

och betingade kovariansen mellan två stokastiska variabler X och Y givet stokastiska variabeln Z definieras enligt

$$\text{Cov}(X, Y | Z) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X | Z))(Y - \mathbb{E}(Y | Z)) | Z).$$

B.2 Flerdimensionella stokastiska variabler

Låt X_1, \dots, X_n vara stokastiska variabler på sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Då kallas kolonnvektorn $\mathbf{x} := (X_1, \dots, X_n)^\top$ en *n-dimensionell stokastisk vektor* eller en *n-dimensionell stokastisk variabel*.

Väntevärdet av en stokastisk vektor $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ ges av

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} \mathbf{x} d\mathbb{P} = \left(\int_{\Omega} X_1 d\mathbb{P} \quad \dots \quad \int_{\Omega} X_n d\mathbb{P} \right)^\top = \left(\mathbb{E}(X_1) \quad \dots \quad \mathbb{E}(X_n) \right)^\top. \quad (\text{B.5})$$

På samma sätt definieras en *stokastisk matris* genom

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & \dots & X_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m,1} & \dots & X_{m,n} \end{pmatrix}$$

och väntevärdet av en stokastisk matris ges av

$$\mathbb{E}(\mathbf{M}) := \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_{1,1}) & \dots & \mathbb{E}(X_{1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}(X_{m,1}) & \dots & \mathbb{E}(X_{m,n}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Lineariteten hos väntevärdet gäller också för stokastiska vektorer och matriser. Det gäller alltså för den *n-dimensionella* stokastiska vektorn \mathbf{x} att

$$\mathbb{E}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) = \mathbf{A} \mathbb{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{b},$$

där \mathbf{A} är en konstant $m \times n$ matris och \mathbf{b} en konstant m -dimensionell vektor. Det gäller också för *n-dimensionella* stokastiska vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ att

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_k) = \mathbb{E}(\mathbf{x}_1) + \mathbb{E}(\mathbf{x}_2) + \dots + \mathbb{E}(\mathbf{x}_k)$$

Kovariansmatrisen $\mathbf{P}_x = \text{Cov}(\mathbf{x})$ för en stokastisk vektor $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ definieras som

$$\mathbf{P}_x := \mathbb{E}((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}))^\top) \quad (\text{B.7})$$

och enligt definitionerna (B.1), (B.4) och (B.6) fås att

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x &= \mathbb{E} \begin{pmatrix} (X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 & \dots & (X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_n - \mathbb{E}(X_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - \mathbb{E}(X_n))(X_1 - \mathbb{E}(X_1)) & \dots & (X_n - \mathbb{E}(X_n))^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \dots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

På samma sätt definieras kovariansmatrisen $\mathbf{P}_{x,y} = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mellan två stokastiska vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ som

$$\mathbf{P}_{x,y} := \mathbb{E}((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y}))^\top). \quad (\text{B.8})$$

Då alla par av variabler (X_i, Y_j) är oberoende, det vill säga vektorerna \mathbf{x} och \mathbf{y} är oberoende fås att $\mathbf{P}_{x,y} = \mathbf{0}$ och då sägs vektorerna \mathbf{x} och \mathbf{y} vara okorrelerade, omvändningen gäller vanligtvis inte. Följande räkneregler, som följer direkt från definitionerna och lineariteten hos väntevärdet, gäller för kovariansmatrisen.

Lemma B.16. *Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ vara stokastiska vektorer och låt \mathbf{A} och \mathbf{B} vara konstanta matriser, sådana att multiplikationerna nedan är väldefinierade. Det gäller att*

1. $\mathbf{P}_{y,x} = \mathbf{P}_{x,y}^\top$.
2. $\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{x} \pm \mathbf{B}\mathbf{y}) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^\top \pm \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{B}^\top$
 $\pm \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathbf{A}^\top + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{y}) \mathbf{B}^\top$.

Definition B.17. Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum och låt \mathbf{x} och \mathbf{y} vara stokastiska vektorer på Ω . Det betingade väntevärdet av \mathbf{x} givet \mathbf{y} är en $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar stokastisk vektor, betecknad

$$\mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}),$$

sådan att

$$\int_A \mathbf{x} d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) d\mathbb{P} \quad \text{för varje } A \in \sigma(\mathbf{y}).$$

Den *betingade kovariansmatrisen* $\mathbf{P}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}} = \text{Cov}(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ för en stokastisk vektor \mathbf{x} givet \mathbf{y} definieras som

$$\text{Cov}(\mathbf{x} | \mathbf{y}) := \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} | \mathbf{y}))(\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} | \mathbf{y}))^T | \mathbf{y} \right). \quad (\text{B.9})$$

Den *betingade kovariansmatrisen mellan \mathbf{x} och \mathbf{y} givet \mathbf{z}* ges av

$$\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{z}) := \mathbb{E} \left((\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x} | \mathbf{z}))(\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y} | \mathbf{z}))^T | \mathbf{z} \right). \quad (\text{B.10})$$

Följande resultat följer från resultaten för endimensionella fallet.

Sats B.18. *Låt $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vara ett sannolikhetsrum. Låt \mathbf{x} och \mathbf{y} vara integrerbara stokastiska variabler på Ω och $\sigma(\mathbf{y}) \subseteq \mathcal{A}$ är σ -algebran som genereras av \mathbf{y} . Följande påståenden gäller*

1. *Avbildningen $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{E}(\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y}))$ är linjär.*
2. *Det finns en funktion f , sådan att $\mathbb{E}(\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y})) = f(\mathbf{y})$.*
3. *$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y}))) = \mathbb{E}(\mathbf{x})$.*
4. *Om \mathbf{x} är oberoende av \mathbf{y} fås att $\mathbb{E}(\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y})) = \mathbb{E}(\mathbf{x})$.*
5. *$\mathbb{E}(\mathbf{x}\mathbf{z} | \sigma(\mathbf{y})) = \mathbf{x}\mathbb{E}(\mathbf{z} | \sigma(\mathbf{y}))$ om \mathbf{z} och $\mathbf{x}\mathbf{z}$ är integrerbara och \mathbf{x} är $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar.*
6. *Om \mathbf{x} är $\sigma(\mathbf{y})$ -mätbar fås att $\mathbb{E}(\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y})) = \mathbf{x}$ och $\text{Cov}(\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$.*
7. *$\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{x} \pm \mathbf{B}\mathbf{z} | \sigma(\mathbf{y})) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y})) \mathbf{A}^T \pm \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \sigma(\mathbf{y})) \mathbf{B}^T$
 $\pm \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{x} | \sigma(\mathbf{y})) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \text{Cov}(\mathbf{z} | \sigma(\mathbf{y})) \mathbf{B}^T$.*

Om de stokastiska vektorerna \mathbf{x} och \mathbf{y} är av samma dimension n så betyder olikheten $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ att $X_i \leq Y_i$ för varje $i = 1, \dots, n$ och det gäller att

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}) \leq \mathbb{E}(\mathbf{y}). \quad (\text{B.11})$$

B.2.1 p -dimensionell normalfördelning

Definition B.19. Stokastiska variablerna X_1, \dots, X_p sägs vara *simultant normalfördelade* om det gäller för varje följd av reella tal a_1, \dots, a_p att den stokastiska variabeln

$$Z := \sum_{i=1}^p a_i X_i$$

är normalfördelad. En stokastisk vektor $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_p)^T$ sägs vara *gaussisk* eller *p -dimensionellt normalfördelad* om de stokastiska variablerna X_1, \dots, X_p är simultant normalfördelade.

Denna definition tillåter att komponenterna kan vara singulärt normalfördelade, i vilket fall vektorn \mathbf{x} saknar täthet i \mathbb{R}^p . Ifall \mathbf{x} har en täthet så kan den gaussiska vektorn definieras med hjälp av den simultana täthetsfunktionen.

Det är uppenbart från definitionen att komponenterna X_1, \dots, X_p i en gaussisk vektor är gaussiska. Omvändningen gäller nödvändigtvis inte, det vill säga det faktum att två stokastiska variabler X_1 och X_2 är gaussiska implicerar inte att vektorn $\mathbf{x} = (X_1, X_2)^T$ är gaussisk, det är alltså viktigt att de är också simultant normalfördelade.

Som för den normalfördelade stokastiska variabeln så bestäms fördelningen för den gaussiska vektorn \mathbf{x} entydigt av väntevärdet $\mathbb{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}$ och kovariansmatrisen $\text{Cov}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_x$, vilket kan betecknas $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}_x)$.

Nedan följer några viktiga resultat för gaussiska vektorer, där det tredje påståendet är ett överraskande och användbart resultat. För bevis, se [JP03, Sats 16.2, s. 129], [JP03, Sats 16.3, s. 130] och [JP03, Sats 16.4, s. 131].

Sats B.20. Låt \mathbf{x} vara en n -dimensionell gaussisk vektor med väntevärdet $\boldsymbol{\mu}$ och låt \mathbf{y} vara en m -dimensionell gaussisk vektor oberoende av \mathbf{x} . Följande påståenden gäller

1. Det finns oberoende stokastiska variabler Z_1, \dots, Z_n , där $Z_i \sim N(0, \lambda_i)$, $\lambda_i \geq 0$, för varje $1 \leq i \leq n$ och en ortogonal matris \mathbf{A} , sådan att $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{z}$, där $\mathbf{z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$.
2. Vektorn $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ är gaussisk i \mathbb{R}^{n+m} .
3. Två komponenter X_j och X_k av $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_n)^T$ är oberoende om och endast om de är okorrelerade.

Bilaga C

Programkod

C.1 Exempel 3.24

```
1 clear;          clf;
2 t = 12;         %simuleringstid i sekunder
3 dt = 0.1;      %samplingsintervall
4 dy = 0.1;      %mätintervall för bild 1
5 n = t/dt;      %antalet iterationer av simuleringen
6
7 %systemmatriser
8 A1 = [0, 0, 1, 0;0, 0, 0, 1;0, 0, 0, 0;0, 0, 0, 0];
9 A = expm(A1*dt);
10 H = [0, 0, 1, 0;0, 0, 0, 1]';
11 C = [1, 0, 0, 0;0, 1, 0, 0];
12
13 %processbrusets väntevärde och kovarians
14 q1 = 1;        q2 = 1;        r = [q1^2, 0;0, q2^2];
15 Pv = integral(@(s)expm(A1*s)*H*r*H'*expm(A1'*s),0,dt,'ArrayValued',true);
16 mv = zeros(size(A,1),1);      F = eye(size(Pv,1));
17
18 %mätbrusets väntevärde och kovarians
19 r1 = 0.5;      r2 = 0.5;      Pw = [r1^2, 0;0, r2^2];
20 mw = zeros(size(C,1),1);      G = eye(size(Pw,1));
21
22 %starttillståndets väntevärde och kovarians
23 m0 = zeros(size(A,1),1);      P0 = eye(size(A,1));
24 x0 = mvnrnd(m0,P0,1)';        p1 = plot(x0(1),x0(2),'b*'); hold on
25
```

```

26 %allokering av variabler
27 x = cell(1,n);          y = cell(1,n);
28 x_pred = cell(1,n);    x_korr = cell(1,n);    x_est = cell(1,n);
29 P_pred = cell(1,n);    P_korr = cell(1,n);
30
31 if dy == dt %gör mätning vid t=0 om mätintervall = samplingsintervall
32     y0 = C*x0 + G*mvnrnd(mw,Pw,1)';
33     [x_est_0, P_est_0] = kf_korrektion(m0,P0,y0,C,G,Pw);
34     [x_pred{1},P_pred{1}] = kf_prediktion(x_est_0,P_est_0,A,F,Pv);
35     p3 = plot(y0(1),y0(2),'r. ');
36 else
37     [x_pred{1},P_pred{1}] = kf_prediktion(m0,P0,A,F,Pv);
38     x_est_0 = m0;
39 end
40
41 p4 = plot(x_est_0(1),x_est_0(2),'k*');
42
43 for k = 1:n
44     %iterera tillståndet och beräkna prediktionen
45     if k == 1
46         x{1} = A*x0 + F*mvnrnd(mv,Pv,1)';
47     else
48         x{k} = A*x{k-1} + F*mvnrnd(mv,Pv,1)';
49         if isempty(x_korr{k-1})
50             [x_pred{k},P_pred{k}] = kf_prediktion(x_pred{k-1},P_pred{k-1},A,F,Pv);
51         else
52             [x_pred{k},P_pred{k}] = kf_prediktion(x_korr{k-1},P_korr{k-1},A,F,Pv);
53         end
54     end
55
56     %gör mätning och beräkna korrektion vid varje mätintervall dy
57     if mod(k*dt,dy) == 0
58         y{k} = C*x{k} + G*mvnrnd(mw,Pw,1)';
59         [x_korr{k},P_korr{k}] = kf_korrektion(x_pred{k},P_pred{k},y{k},C,G,Pw);
60     end
61
62     if isempty(x_korr{k})
63         x_est{k} = x_pred{k};
64     else
65         x_est{k} = x_korr{k};
66     end

```

```

67     if k == 1
68         p2 = plot([x0(1),x{1}(1)], [x0(2),x{1}(2)], 'b—');
69         p4 = plot([x_est_0(1),x_est{k}(1)], [x_est_0(2),x_est{k}(2)], 'k—');
70     else
71         p2 = plot([x{k-1}(1),x{k}(1)], [x{k-1}(2),x{k}(2)], 'b—');
72         p4 = plot([x_est{k-1}(1),x_est{k}(1)], [x_est{k-1}(2),x_est{k}(2)], 'k—');
73     end
74     if mod(k*dt,dy) == 0
75         p3 = plot(y{k}(1),y{k}(2), 'r. ');
76     end
77 end
78
79 legend([p1; p2; p3; p4], {'Starttillst{\aa}nd', 'Verklig position', 'M{"a}tning', '
    Estimat'}, 'Interpreter', 'latex');
80 hold off
81
82 function [x,P] = kf_prediktion(x,P,A,F,Q)
83     x = A * x;
84     P = A * P * A' + F * Q * F';
85 end
86
87 function [x,P] = kf_korrektion(x,P,y,C,G,R)
88     K = P * C' * (C * P * C' + G * R * G')^(-1);
89     x = x + K * (y - C * x);
90     P = P - K * C * P;
91 end

```

Följande kod körs efter ovanstående kod för att beräkna prediktion och korrektion med längre mätintervall men med samma realisering som i ovanstående kod.

```

1 dy = 0.4;           %mätintervall för bild 2
2 x_pred = cell(1,n);   x_korr = cell(1,n);   x_est = cell(1,n);
3 P_pred = cell(1,n);   P_korr = cell(1,n);
4
5 [x_pred{1},P_pred{1}] = kf_prediktion(m0,P0,A,F,Pv);
6 x_est_0 = m0;
7
8 p1 = plot(x0(1),x0(2), 'b*');   hold on
9 p4 = plot(x_est_0(1),x_est_0(2), 'k*');
10
11 for k = 1:n
12     %beräna prediktionen

```



```

13     if k > 1
14         if isempty(x_korr{k-1})
15             [x_pred{k},P_pred{k}] = kf_prediktion(x_pred{k-1},P_pred{k-1},A,F,Pv);
16         else
17             [x_pred{k},P_pred{k}] = kf_prediktion(x_korr{k-1},P_korr{k-1},A,F,Pv);
18         end
19     end
20     %beräkna korrektion vid varje mätintervall dy
21     if mod(k*dt,dy) == 0
22         [x_korr{k},P_korr{k}] = kf_korrektion(x_pred{k},P_pred{k},y{k},C,G,Pw);
23     end
24     if isempty(x_korr{k})
25         x_est{k} = x_pred{k};
26     else
27         x_est{k} = x_korr{k};
28     end
29
30     if k == 1
31         p2 = plot([x0(1),x{1}(1)],[x0(2),x{1}(2)],'b-');
32         p4 = plot([x_est_0(1),x_est{k}(1)],[x_est_0(2),x_est{k}(2)],'k-');
33     else
34         p2 = plot([x{k-1}(1),x{k}(1)],[x{k-1}(2),x{k}(2)],'b-');
35         p4 = plot([x_est{k-1}(1),x_est{k}(1)],[x_est{k-1}(2),x_est{k}(2)],'k-');
36     end
37     if mod(k*dt,dy) == 0
38         p3 = plot(y{k}(1),y{k}(2),'r.');
```

```

39     end
40 end
41
42 legend([p1; p2; p3; p4],{'Starttillst{\aa}nd', 'Verklig position', 'M{"a}tning', '
    Estimat'}, 'Interpreter', 'latex'); hold off
43
44 function [x,P] = kf_prediktion(x,P,A,F,Q)
45     x = A * x;
46     P = A * P * A' + F * Q * F';
47 end
48 function [x,P] = kf_korrektion(x,P,y,C,G,R)
49     K = P * C' * (C * P * C' + G * R * G')^(-1);
50     x = x + K * (y - C * x);
51     P = P - K * C * P;
52 end

```

C.2 Kopplade elnätverk

```

1 clear;      clf;
2 t = 100;    %simuleringstid i sekunder
3 dy = 1;    %mätintervall
4 dt = 1;    %samplingsintervall
5 du = dt;   %reglerintervall
6 n = t/dt;
7
8 tp1 = 20;   tp2 = 20;
9 kp1 = 120;  kp2 = 120;
10 tt1 = 0.3; tt2 = 0.3;
11 tg1 = 0.08; tg2 = 0.08;
12 r1 = 2.4;  r2 = 2.4;
13 t12 = 0.545;
14
15 %systemmatriser
16 A1 = [-1/tp1, kp1/tp1,      0,      0,      0,      0, -kp1/tp1;
17        0, -1/tt1, 1/tt1,      0,      0,      0,      0;
18        -1/(tg1*r1),      0, -1/tg1,      0,      0,      0,      0;
19        0,      0,      0,      -1/tp2, kp2/tp2,      0,  kp2/tp2;
20        0,      0,      0,      0, -1/tt2, 1/tt2,      0;
21        0,      0,      0, -1/(tg2*r2),      0, -1/tg2,      0;
22        2*pi*t12,      0,      0, -2*pi*t12,      0,      0,      0];
23
24 B1 = [0, 0, 1/tg1, 0, 0,      0, 0;
25        0, 0,      0, 0, 0, 1/tg2, 0]';
26
27 H1 = [-kp1/tp1, 0, 0,      0, 0, 0, 0;
28        0, 0, 0, -kp2/tp2, 0, 0, 0]';
29
30 C = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0;
31        0, 0, 0, 0, 0, 0, 1];
32
33 %Wienerprocessens inkrementella kovarians
34 Ph = 10^-5 * eye(size(H1,2));
35
36 %sampla systemet
37 A = expm(A1*dt);
38 B = integral(@(s)expm(A1*s),0,dt,'ArrayValued',true)*B1;
39 H = integral(@(s)expm(A1*s),0,dt,'ArrayValued',true)*H1;

```

```

40
41 %processbrusets väntevärde och kovarians
42 Pv = integral(@(s)expm(A1*s)*H1*Ph*H1'*(expm(A1*s)'),0,dt,'ArrayValued',true);
43 mv = zeros(size(Pv,1),1);
44 F = eye(size(Pv,1));
45
46 %mätbrusets väntevärde och kovarians
47 Pw = 10^-5 * eye(size(C,1));
48 mw = zeros(size(C,1),1);
49 G = eye(size(Pw,1));
50
51 %starttillståndets väntevärde och kovarians
52 m0 = zeros(size(A,1),1);
53 P0 = idare(A',C',F*Pv*(F'),Pw);
54 x0 = m0;
55
56 %kostnadsmatriser
57 Q = 5*(C')*C;
58 R = eye(size(B,2));
59 SN = zeros(size(Q));
60
61 %Lös Riccatiekvationen och beräkna återkopplingsmatriserna för regleringen i
    förväg
62 [L0, L, S0, S] = aterkoppling(A,B,SN,Q,R,n);
63
64 %allokering av variabler
65 x = cell(1,n);          y = cell(1,n);          u = cell(1,n);
66 x_pred = cell(1,n);    x_korr = cell(1,n);
67 P_pred = cell(1,n);    P_korr = cell(1,n);
68 v = cell(1,n);         w = cell(1,n);
69
70 %slumpa process- och mätbruset
71 v0 = mvnrnd(mv,Pv,1)';
72 w0 = mvnrnd(mw,Pw,1)';
73 for k = 1:n
74     v{k} = mvnrnd(mv,Pv,1)';
75     w{k} = mvnrnd(mw,Pw,1)';
76 end
77
78 %bestäm styrsignalen vid tid t=0 och beräkna prediktionen
79 if dy == dt %om mätning görs vid tid 0 beräkna korrektionen
80     y0 = C*x0 + w0;

```

```

81     [x_korr_0,P_korr_0] = kf_korrektion(m0,P0,y0,C,G,Pw);
82     u0 = -L0*x_korr_0;
83     [x_pred{1},P_pred{1}] = kf_prediktion(x_korr_0,P_korr_0,A,B,u0,F,Pv);
84 else
85     x_pred_0 = m0;
86     u0 = -L0*x_pred_0;
87     [x_pred{1},P_pred{1}] = kf_prediktion(x_pred_0,P0,A,B,u0,F,Pv);
88 end
89
90 for k = 1:n
91     %iterera tillståndet och beräkna prediktionen
92     if k == 1
93         % H * [0;1] simulerar en 0.1% ökning på nätverk 2
94         x{1} = A*x0 +B*u0 + H*[0; 1] + F*v0;
95     else
96         x{k} = A*x{k-1} + B*u{k-1} + F*v{k-1};
97
98         if isempty(x_korr{k-1})
99             [x_pred{k},P_pred{k}] = kf_prediktion(x_pred{k-1},P_pred{k-1},A,B,u{
100                 k-1},F,Pv);
101         else
102             [x_pred{k},P_pred{k}] = kf_prediktion(x_korr{k-1},P_korr{k-1},A,B,u{
103                 k-1},F,Pv);
104         end
105     end
106
107     %gör mätning och beräkna korrektion vid varje mätintervall dy
108     if mod(k*dt,dy) == 0
109         y{k} = C*x{k} + G*w{k};
110         [x_korr{k},P_korr{k}] = kf_korrektion(x_pred{k},P_pred{k},y{k},C,G,Pw);
111     end
112
113     %beräkna styrsignalen
114     if mod(k*dt,du) == 0
115         if isempty(x_korr{k})
116             u{k} = -L{k}*x_pred{k};
117         else
118             u{k} = -L{k}*x_korr{k};
119         end
120     end
121
122     if k == 1
123         u{1} = u0;
124     else
125

```

```

120         u{k} = u{k-1};
121     end
122 end
123 end
124
125 %plotta mätningarna och styrsignalerna
126 for k = 1:n
127     if k == 1
128         if exist('y0','var')
129             s1 = subplot(2,2,1); plot(0,y0(1),'r. '); hold on;
130             s2 = subplot(2,2,2); plot(0,y0(2),'r. '); hold on;
131         else
132             s1 = subplot(2,2,1); hold on;
133             s2 = subplot(2,2,2); hold on;
134         end
135         s3 = subplot(2,2,3); plot([(k-1)*dt,k*dt],[u0(1),u0(1)],'b- '); hold on
136         s4 = subplot(2,2,4); plot([(k-1)*dt,k*dt],[u0(2),u0(2)],'b- '); hold on
137     else
138         if ~isempty(y{k})
139             s1 = subplot(2,2,1); plot((k-1)*dt,y{k}(1),'r. ');
140             s2 = subplot(2,2,2); plot((k-1)*dt,y{k}(2),'r. ');
141         end
142         s3 = subplot(2,2,3); plot([(k-1)*dt,k*dt],[u{k-1}(1),u{k-1}(1)],'b- ');
143         s4 = subplot(2,2,4); plot([(k-1)*dt,k*dt],[u{k-1}(2),u{k-1}(2)],'b- ');
144     end
145     if k == n
146         subplot(2,2,1); plot([0,t],[0,0],'k: '); hold off
147         subplot(2,2,2); plot([0,t],[0,0],'k: '); hold off
148         subplot(2,2,3); plot([0,t],[0,0],'k: '); hold off
149         subplot(2,2,4); plot([0,t],[0,0],'k: '); hold off
150     end
151 end
152 xlabel(s1, 'tid (s)'); ylabel(s1, '\Delta w_1');
153 xlabel(s2, 'tid (s)'); ylabel(s2, '\Delta P_{tie}');
154 xlabel(s3, 'tid (s)'); ylabel(s3, '\Delta P_{ref1}');
155 xlabel(s4, 'tid (s)'); ylabel(s4, '\Delta P_{ref2}');
156 h = zoom; h.Motion = 'vertical'; h.Enable = 'on';
157
158 function [x,P] = kf_prediktion(x,P,A,B,u,F,Pv)
159     %Prediktionen av tillståndet
160     x = A * x + B * u;

```

```

161     %Prediktionens kovarians
162     P = A * P * A' + F * Pv * F';
163 end
164
165 function [x,P] = kf_korrektion(x,P,y,C,G,Pw)
166     %Kalmanförstärkningen
167     K = P * C' * (C * P * C' + G * Pw * G')^(-1);
168     %Korrektionen av tillståndet
169     x = x + K * (y - C * x);
170     %Korrektionens kovarians
171     P = P - K * C * P;
172 end
173
174 function [L0, L, S0, S] = aterkoppling(A,B,SN,Q,R,n)
175
176     L = cell(n,1);
177     S = cell(n,1);
178
179     L{n} = (B'*SN*B + R)^(-1)*B'*SN*A;
180     S{n} = A'*SN*A + Q - A'*SN*B*(B'*SN*B + R)^(-1)*B'*SN*A;
181
182     for i = 1:n-1
183         L{n-i} = (B'*S{n-i+1}*B + R)^(-1)*B'*S{n-i+1}*A;
184         S{n-i} = A'*S{n-i+1}*A + Q...
185             - A'*S{n-i+1}*B*(B'*S{n-i+1}*B + R)^(-1)*B'*S{n-i+1}*A;
186     end
187
188     L0 = (B'*S{1}*B + R)^(-1)*B'*S{1}*A;
189     S0 = A'*S{1}*A + Q - A'*S{1}*B*(B'*S{1}*B + R)^(-1)*B'*S{1}*A;
190 end

```

Litteratur

- [AA11] Ehab S. Ali och Sahar M. Abd-Elazim. "Bacteria foraging optimization algorithm based load frequency controller for interconnected power system". I: *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 33 (3 2011), s. 633–638. DOI: 10.1016/j.ijepes.2010.12.022.
- [AB89] Karl G. Andersson och Lars-Christer Böiers. *Ordinära differentialekvationer*. Lund: Studentlitteratur AB, 1989, s. vi+358.
- [DGG86] Carlos E. De Souza, Michel R. Gevers och Graham C. Goodwin. "Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices". I: *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-31.9 (1986), s. 831–838. DOI: 10.1109/TAC.1986.1104415.
- [DV85] M. H. A. Davis och R. B. Vinter. *Stochastic modelling and control*. Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall, London, 1985, s. xii+393. DOI: 10.1007/978-94-009-4828-0.
- [Gir03] Narayan C. Giri. *Multivariate statistical analysis*. 2. utg. New York: Marcel Dekker, 2003, s. xiv+558.
- [HJ12] Roger A. Horn och Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2. utg. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2012, s. xviii+643.
- [HRS07] Christiaan Heij, André Ran och Freek van Schagen. *Introduction to mathematical systems theory: Linear systems, identification and control*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, s. x+166. DOI: 10.1007/978-3-7643-7549-2.

- [JP03] Jean Jacod och Philip Protter. *Probability essentials*. 2. utg. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003, s. x+254. DOI: 10.1007/978-3-642-55682-1.
- [Kal60] Rudolph E. Kalman. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". I: *Transactions of the ASME—Journal of Basic Engineering* 82.1 (1960), s. 35–45. DOI: 10.1115/1.3662552.
- [Kay93] Steven M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1993, s. xii+595.
- [Kun94] Prabha S. Kundur. *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, Inc., 1994.
- [LR95] Peter Lancaster och Leiba Rodman. *Algebraic Riccati Equations*. Oxford science publications. Clarendon Press, jan. 1995, s. xvii+480.
- [Lue79] David G. Luenberger. *Introduction to dynamic systems: Theory, Models, and Applications*. New York: Wiley, 1979, s. xvi+446.
- [LXP08] Frank L. Lewis, Lihua Xie och Dan Popa. *Optimal and robust estimation: with an introduction to stochastic control theory*. 2. utg. Boca Raton: Taylor & Francis, 2008, s. xxii+523.
- [PMH13] Sidhartha Panda, Banaja Mohanty och Prakash K. Hota. "Hybrid BFOA–PSO algorithm for automatic generation control of linear and nonlinear interconnected power systems". I: *Applied Soft Computing* 13 (12 2013), s. 4718–1730. DOI: 10.1016/j.asoc.2013.07.021.
- [Ros+13] Samira Roshany-Yamchi m. fl. "Kalman Filter-Based Distributed Predictive Control of Large-Scale Multi-Rate Systems: Application to Power Networks". I: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21.1 (2013), s. 27–39. DOI: 10.1109/TCST.2011.2172444.
- [Ros10] Sheldon M. Ross. *A First Course in Probability*. 8. utg. Pearson Prentice Hall, 2010, s. xiv+530.
- [Sha+16] Nilaykumar N. Shah m. fl. "Automatic load frequency control of two area system using L-Q-R method". I: *International Journal of Current Engineering and Scientific Research* 3 (6 2016), s. 54–66. DOI: 10.21276/Ijcesr.

- [Sär13] Simo Särkkä. *Bayesian Filtering and Smoothing*. Vol. 3. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2013, s. xxii+232. DOI: 10.1017/CB09781139344203.
- [TSH01] Harry L. Trentelman, Anton A. Stoorvogel och Malo Hautus. *Control theory for linear systems*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2001, s. xvi+389. DOI: 10.1007/978-1-4471-0339-4.
- [Åst70] Karl J. Åström. *Introduction to stochastic control theory*. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 70. Academic Press, New York-London, 1970, s. xiv+299.
- [Øks98] Bernt Øksendal. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. 5. utg. Universitext. Springer-Verlag, 1998. DOI: 10.1007/978-3-662-03620-4.