Åbo Akademi

FAKULTETEN FÖR
NATURVETENSKAPER OCH TEKNIK

Avhandling pro gradu i matematik

Tre konstruktioner av den brownska rörelsen

Skribent:

Tobias Åkerlund, 42104

Handledare:

Alex Karrila

2024

Sammanfattning

I denna avhandling presenteras den brownska rörelsen samt tre olika konstruktioner av den. Brownsk rörelse är den slumpmässiga värmerörelse som kan observeras hos små partiklar i en vätska eller gas. Matematiskt beskrivs brownsk rörelse av den så kallade Wiener-processen; detta är en tidskontinuerlig slumpprocess med oberoende tillägg som följer en normalfördelning.

I denna avhandling fokuserar vi på att konstruera brownsk rörelse och därmed påvisa dess existens, och även dess entydighet. Brownsk rörelse är unik sånär som på konstruktionen, som kan göras på flera olika sätt. Vi presenterar i denna avhandling tre olika konstruktioner: dessa är brownska brons konstruktion, Kolmogorov-Tjentsovs konstruktion samt Donskers teorem.

Brownsk rörelse karakteriseras av vissa egenskaper och målet är att skapa en slumpprocess med alla egenskaper karakteriserande brownsk rörelse. Konstruktionerna skiljer sig en hel del från varandra. Brownska brons konstruktion förlitar sig starkt på brownska rörelsens fördelning medan Kolmogorov-Tjentsovs konstruktion går via Kolmogorov-Tjentsovs sats som är ett mycket allmänt resultat som även kan tillämpas på andra stokastiska processer än den brownska rörelsen. Konstruktionen via Donskers teorem är väsentligt annorlunda: Donskers teorem säger att brownsk rörelse uppstår som ett sorts gränsvärde av en enkel, lämpligt skalad slumpvandring. Alla ovanstående konstruktioner kräver noggrannhet: slumpprocesser, slumpfunktioner, stokastiska variabler på metriska rum och svag konvergens med mera är begrepp som behöver behandlas.

Donskers teorem förklarar varför brownsk rörelse förekommer inom otaliga tillämpningar och kan därmed anses mer grundläggande än övriga konstruktioner. Brownsk rörelse används förutom i matematik även inom exempelvis ekonomi och fysik. Ett vanligt användningsområde för brownsk rörelse är aktiesimulering, och på korta tidsskalor har denna modell visat sig fungera bra.

Innehåll

1 Inledning **2**

2 Motivering till brownsk rörelse **7**

2.1 Grundbegrepp . . . 7

2.2 De Moivre-Laplace-teoremet . . . 9

2.3 En gissning till brownsk rörelse . . . 13

3 Den brownska brons konstruktion **16**

3.1 Den brownska slumpprocessen och -funktionen . . . 16

3.2 Betingade fördelningar . . . 19

3.3 Definition av approximatfunktionerna . . . 20

3.4 Egenskaper hos funktionsföljden . . . 22

3.5 Konvergensen av följden . . . 24

3.6 En identifikation av gränsfunktionen . . . 26

4 Kolmogorov-Tjentsov-konstruktionen **28**

5 Donskers teorem **34**

5.1 Grundbegrepp . . . 36

5.2 Strama måttsamlingar på $C([0,1],\mathbb{R})$ . . . 38

5.3 Verifiering av stramhet hos lagarna av $X^{(a_n)}$ . . . 44

5.4 Kapitlets huvudresultat: Donskers teorem . . . 47

Kapitel 1

Inledning

Brownsk rörelse är den slumpmässiga, oregelbundna rörelse som kan iakttas hos väldigt små partiklar som svävar i gaser eller vätskor. Denna, i den form som den i dag känns till, studerades och beskrevs först av den brittiske botanisten Robert Brown år 1827. Han uppmärksammade detta då han i mikroskop undersökte pollen svävande i vatten, även om man inte då ännu benämnde det brownsk rörelse. Det tog dock ända till år 1900 innan brownsk rörelse modellerades och namngavs som en stokastisk process; detta gjordes av den franske matematikern Louis Bachelier i sin doktorsavhandling, [1, s. 21-86]. Den första som lyckades förklara fenomenet där pollenpartiklarna svävade i vatten var Albert Einstein 1905 i en av sina första stora vetenskapliga publikationer, [2, s. 549-560]. Förklaringen till brownsk rörelse var att rörelsen uppkommer hos partiklar som är så små att det finns en stor sannolikhet för att mycket färre molekyler från omgivningen stöter på partikelns ena sida, vilket leder till att partikeln får en stöt i en riktning där det finns mindre antal molekyler. Denna förklaring till brownsk rörelse ledde till att atomteorin, i dess moderna version, accepterades bland forskare.

Brownsk rörelse, som definierad i denna avhandling, är betydligt mera tillämpbar än att endast kunna förklara partiklars slumpmässiga rörelse; den kan exempelvis användas för att simulera aktieutveckling, modellera termiskt brus i elektriska kretsar och även för en hel del andra fysikaliska, biologiska eller ekonomiska system som involverar slumpmässiga störningar. Brownsk rörelse utgör även grunden för moderna matematiska begrepp såsom Itokalkyl och stokastiska differentialekvationer. Stokastiska differentialekvationer är differentialekvationer där en eller fler termer är stokastiska processer, och ett vanligt fall är att någon term utgörs av brownsk rörelse. Lösningen till sådana differentialekvationer är även den en stokastisk process. Stokastiska differentialekvationer har många tillämpningar inom matematik, och de används bland annat för att modellera olika beteenden av stokastiska modeller som exempelvis aktieutveckling. Vidare gäller för brownsk rörelse att den nästan säkert är ingenstans deriverbar, och därav kräver den sina egna analysregler. För detta ändamål har Itokalkyl uppstått som en version av stokastisk kalkyl tillämpbart på brownsk rörelse. Itokalkyl har viktiga tillämpningar inom matematisk finans och inom teorin om stokastiska differentialekvationer. Med hjälp av Itokalkyl kan bland annat stokastiska differentialekvationer formuleras och lösas.

Målsättningen med denna avhandling är att ur en matematisk synvinkel introducera tre konstruktioner av endimensionell brownsk rörelse som en slumpmässig funktion som beskriver en partikels rörelsebana under ett givet tidsintervall. Målsättningen är att göra konstruktionerna noggrannare än de källor som använts så att en bakgrundsnivå motsvarande ÅA:s kurser Sannolikhetslära del 1 och 2, [11] och [12], ska räcka till för att följa med avhandlingens innehåll. Även kunskaper om metriska rum är till fördel; dessa fås till exempel från [8] eller motsvarande. Avhandlingen inleds med ett kapitel som ger en historisk aspekt av brownsk rörelse. Bland annat motiveras existensen av en process med de tre första egenskaperna kopplade till brownsk rörelse nedan. Nyckelteoremet i detta kapitel är de Moivre-Laplace-teoremet som är ett viktigt specialfall av den centrala gränsvärdessatsen, och det var vid studiet av denna som normalfördelningen påträffades för första gången. Med hjälp av denna sats visar vi att normalfördelningen uppstår som ett gränsvärde av en enkel, skalad slumpvandring i egenskap av en vektor, och denna vektor har de första tre egenskaperna som karakteriserar brownsk rörelse nedan. Efter detta övergår vi till själva konstruktionerna: dessa är brownska brons konstruktion, Kolmogorov-Tjentsov-konstruktionen och Donskers teorem. För konstruktionerna har som främsta källor använts [4], [5] och [6].

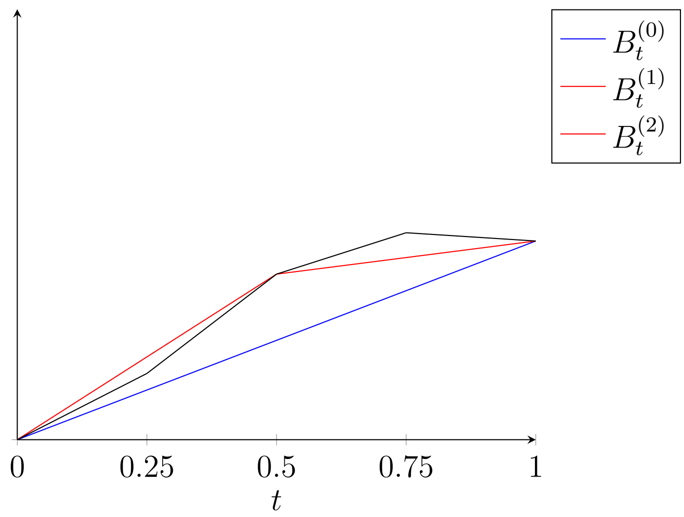
Inom matematik beskrivs brownsk rörelse av den så kallade Wiener-processen, som är en tidskontinuerlig slumpprocess namngiven efter den amerikanske matematikern Norbert Wiener. Wiener påvisade existensen av en sådan process kring 1920. Denna process förekommer ofta i matematik, ekonomi och fysik. Brownsk rörelse, B_t, på intervallet [0,1] karakteriseras av följande egenskaper:

1. $B_0 = 0$.
2. B_t har oberoende tillägg.
3. $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0,t-s)$ för $0 \leq s \leq t \leq 1$.
4. B_t är n.s. kontinuerlig.

Det är inte självklart att det existerar en process där alla egenskaper ovanför samtidigt uppfylls. Den huvudsakliga utmaningen är att visa att den andra och tredje egenskapen inte utesluter möjligheten av en kontinuerlig slumpvandring. Att egenskap två och tre inte utesluter varandra följer av faktumet att summan av oberoende normalfördelade variabler är en normalfördelad variabel med väntevärde och varians bestående av summan av de ingående variablernas väntevärden och varianser. Påvisandet av entydigheten av en Wiener-process är däremot mer rättframt; det följer av att de ändligdimensionella marginalerna av processen entydigt karakteriserar processen, vilket vi framöver även visar. I avhandlingen påvisas med andra ord både existensen och entydigheten av en sådan process, som däremot kan konstrueras på olika sätt. Med konstruktion avses i vårt fall existensbevis och varje konstruktion kräver i sig en viss mängd arbete.

Den första konstruktionen är den så kallade brownska brons konstruktion. Idén här är att om en brownsk rörelse existerar kan vi definiera den genom att upptäcka dess bana på intervallet $[0,1]$ i tätare och tätare gitter av formen $\{\frac{1}{2^k},\frac{2}{2^k},\frac{3}{2^k},...,\frac{2^k-1}{2^k},1\}$, där $k = 1,2,3,...$ Detta är så kallade dyadiska tidpunkter. Detta utförs på så vis att vi börjar med att fixera $B_0 = 0$ och lottar först ut B_1 enligt en normalfördelning. Därefter halveras intervallet och vi lottar ut $B_{1/2}$ betingat på de tidigare punkterna. Denna visar sig även följa en normalfördelning. Punkterna interpoleras därefter linjärt. Vi fortsätter på samma sätt och halverar varje intervall och lottar ut nya punkter i intervallmittpunkterna, enligt den rätta normalfördelningen, mellan de tidigare punkterna och interpolerar dessa linjärt (se illustrationen i Figur 1.1). På detta sätt får vi tätare och tätare gitter och skapar på så vis en funktionsföljd: då vi låter gitterstorleken gå mot noll visar det sig att vi får en gränsfunktion med egenskaperna av brownsk rörelse. På så vis har vi konstruerat brownsk rörelse och dess existens är påvisad.

Nästa och samtidigt den andra konstruktionen av brownsk rörelse är lite annorlunda; den går via den så kallade Kolmogorov-Tjentsov-satsen. Detta är ett allmänt resultat för stokastiska processer. Närmare säger den att stokastiska



Figur 1.1: Några realisationer av processen $B_t^{(n)}$, för $n = 0,1,2$.

processer som uppfyller vissa krav på tilläggens moment är kontinuerliga, eller närmare bestämt har en kontinuerlig version. Genom att vidare välja lämpliga konstanter i Kolmogorov-Tjentsov-satsen visar det sig, via ett naturligt lemma angående tilläggens moment hos normalfördelningen, att den brownska rörelsen satisfierar kraven för att kunna tillämpa Kolmogorov-Tjentsov-satsen. Utmaningen vid denna konstruktion är alltså att bevisa Kolmogorov-Tjentsov-satsen; resten följer tämligen naturligt. På detta sätt lyckas vi skapa en process som förutom de övriga egenskaperna av brownsk rörelse även har kontinuitetsegenskapen, som är den stora utmaningen vid konstruktionen av brownsk rörelse, vilket redan tidigare nämnts. Skillnaden mellan dessa två första konstruktioner är tydlig: brownska bron använder sig starkt av den brownska rörelsens fördelning medan Kolmogorov-Tjentsov är ett mycket mer allmänt resultat som kan tillämpas på även andra processer än brownsk rörelse.

Den tredje konstruktionen via Donskers teorem är den svåraste men samtidigt också den viktigaste av dem. Den säger att brownsk rörelse uppkommer som ett gränsvärde av en lämpligt skalad enkel slumpvandring, där rumsstegen har väntevärde 0 och ändligt fjärde moment. Detta utförs rigoröst i kapitel 5 via Donskers teorem men redan i nästa kapitel visas att det för en slumpvandring med Rademacherfördelade rumssteg, det vill säga rumsstegen tar värde ± 1 med sannolikhet $1/2$, gäller att en lämplig skalning av slumpvandringen konvergerar svagt till en normalfördelad n-dimensionell vektor med egenskaperna av brownsk rörelse, förutom kontinuitetsegenskapen. Av detta verkar det intuitivt sett hoppfullt att en brownsk rörelse skulle kunna existera, men själva konstruktionen med alla detaljer finns i kapitlet om Donskers teorem. Kapitel 2 är endast ett motiverande kapitel, som även ger en liten historisk inblick i varifrån idén till brownsk rörelse eventuellt föddes. Donskers teorem visar varför brownsk rörelse är viktig inom sannolikhetslära och även varför brownsk rörelse är viktig inom en myriad av tillämpningar och kan därmed anses mer grundläggande. Donskers teorem förklarar, i alla fall delvis, varför brownsk rörelse naturligt uppkommer i naturen. När man betraktar långa tidsrymder beter sig de flesta stokastiska processer som slumpvandringar med små men ofta förekommande hopp. Tack vare Donskers teorem kommer sådana processer, på en lämplig tidsskala, i alla fall ungefärligt likna brownsk rörelse.

Kapitel 2

Motivering till brownsk rörelse

Grundtanken med detta kapitel är att ge en liten historisk inblick i brownsk rörelse och motivera vissa egenskaper kopplade till brownsk rörelse, och att även ge en inblick i varifrån dessa kan tänkas härröra sig. Detta sker via Proposition 2.13 där vi visar att normalfördelningen uppstår som ett sorts gränsvärde i form av en vektor med vissa egenskaper karakteriserande brownsk rörelse. För att åstadkomma detta behövs först de Moivre-Laplace-teoremet, Sats 2.7, vilket kan anses vara kapitlets huvudresultat.

2.1 Grundbegrepp

Låt oss först börja med några nödvändiga definitioner.

Definition 2.1. På ett topologiskt rum X avses med $\mathcal{B}$ Borels sigma-algebra på X, det vill säga den minsta sigma-algebran som innehåller alla öppna mängder.

Definition 2.2. Låt (X,Σ) vara ett måttrum och låt Y_i vara X-värda slumpvariabler på sannolikhetsrummen $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$. Y_i *konvergerar svagt* till ett mått $\mathbb{P}$ på (X,Σ) om för alla Σ-kontinuerliga $u : X \to \mathbb{R}$ gäller att

$$\mathbb{E}_i[u(Y_i)] \xrightarrow{i\to\infty} \mathbb{E}[u(Y)], \text{där } Y \sim \mathbb{P}.$$

Detta betecknas $\text{lag}(Y_i) \xrightarrow{\text{svagt}} \mathbb{P}$.

Anmärkning 2.3. Oftast är X ett metriskt rum (X,d) och $\Sigma = \mathcal{B}$ dess Borel sigma-algebra.

Låt oss fortsätta med ett synnerligen elementärt lemma inom sannolikhetslära som kommer att användas en hel del framöver, nämligen Markovs olikhet. Markovs olikhet gäller för icke-negativa stokastiska variabler, och den ger en övre gräns för sannolikheten att variabeln tar värden som är minst en positiv konstant, k, gånger dess väntevärde i form av $\frac{1}{k}$. Med andra ord gäller att om man känner till en stokastisk variabels väntevärde ger Markovs olikhet en övre gräns för hur sannolikt det är att variabeln antar värden mycket större än väntevärdet.

Lemma 2.4. *Markovs olikhet: Om* $X \geq 0$ *och* $\mathbb{E}[X] < \infty$ *så gäller för varje* $a > 0$ *att* $\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Bevis. Från definitionen av väntevärde följer att

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[(\mathbb{I}_{X<a} + \mathbb{I}_{X\geq a})X] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{X<a}X] + \mathbb{E}[\mathbb{I}_{X\geq a}X] \\
&\geq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{X\geq a}X] \geq \mathbb{E}[\mathbb{I}_{X\geq a}a] = a\mathbb{E}[\mathbb{I}_{X\geq a}] \\
&= a \cdot \mathbb{P}[X \geq a].
\end{aligned}$$

□

Vi fortsätter med en tillämpning av Markovs olikhet vilket ger Tjebysjovs olikhet, som även används i fortsättningen, och som även det är ett elementärt resultat inom sannolikhetslära. Tjebysjovs olikhet säger att skillnaden mellan en stokastisk variabel och dess väntevärde är uppåt begränsad av dess varians. Detta är intuitivt sett vad man kan förvänta sig eftersom variansen visar hur nära medelvärdet man i genomsnitt ligger. Närmare bestämt säger Tjebysjovs olikhet att sannolikheten för att en stokastisk variabel avviker från sitt väntevärde med mer än k standardavvikelser absolut sett begränsas uppåt av $\frac{1}{k^2}$.

Lemma 2.5. *Tjebysjovs olikhet: Antag att* $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ *och beteckna* $\mathbb{E}[X] = \mu$*, samt* $\mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sigma^2$*. Då gäller för varje* $a > 0$ *att* $\mathbb{P}[|X-\mu| \geq a] \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$.

Bevis. Genom tillämpande av Lemma 2.4 fås att

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \geq a] = \mathbb{P}[(X-\mu)^2 \geq a^2] \leq \frac{\mathbb{E}[(X-\mu)^2]}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

□

För nästa sats, de Moivre-Laplace-satsen, behövs först följande lemma.

Lemma 2.6. *Stirlings formel: För alla naturliga tal n gäller att* $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \epsilon(n)$*, där* $\epsilon(n) \in \left(\frac{1}{12n+1}, \frac{1}{12n}\right)$.

Bevis. [9] □

2.2 De Moivre-Laplace-teoremet

Låt oss fortsätta med några beteckningar, och några enkla slutsatser som används i nästa sats:

- $X_i \sim Ber(p)$, oberoende och likafördelade.
- $S_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ (det empiriska snittet).
- $\mathbb{P}[S_n = \frac{k}{n}] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ för alla $k = 0,1,...,n$ (en binomialfördelning där $q := 1 - p$).
- $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[S_n] = p$.
- $Var(X_i) = pq$ och $Var(S_n) = \frac{pq}{n}$.
- $\mathbb{P}(|S_n - p| \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}}) \leq \frac{pq}{\alpha^2}$ för alla $\alpha > 0$ (enligt Lemma 2.5).
- Med $\mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2})$ avses $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ för vilket som helst fixt α.

Nu kan vi formulera och bevisa de Moivre-Laplace-teoremet. Detta säger att en lämplig skalning av den enkla slumpvandringen ovan går mot en normalfördelning i fördelning då antalet steg, n, växer obegränsat. I synnerhet säger det att normalfördelningen uppstår som ett sorts gränsvärde av binomialfördelningen då antalet försök, n, växer obegränsat. Detta är ett specialfall av den centrala gränsvärdessatsen, [3, Theorem 21.1], och samtidigt även det enklaste specialfallet. Det var även via detta resultat som normalfördelningen påträffades och studerades för första gången; detta gjordes av Abraham de Moivre, [13]. För att förklara formuleringen av satsen noteras från Tjebysjovs olikhet att $\mathbb{P}[|S_n - p| > \epsilon] \leq \frac{pq}{\epsilon n}$, det vill säga S_n koncentreras kring p då n växer obegränsat. Vidare noteras att $\mathbb{E}[(S_n - p)^2] = Var(S_n) = \frac{pq}{n}$, så fluktuationerna är asymptotiskt lika med $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Detta motiverar satsens formulering nedan.

Sats 2.7. *(De Moivre-Laplace) För alla begränsade funktioner, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, med ett ändligt antal diskontinuitetspunkter gäller:*
$\mathbb{E}[u(\sqrt{n}(S_n - p))] \to \mathbb{E}_{\mathcal{N}(0,pq)}[u(X)]$.

Bevis. Beteckna $Y_n := \sqrt{n}(S_n - p)$, $M := \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x)|$ och fixera $\alpha > 0$.
Då fås

$$\mathbb{E}[u(Y_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{|Y_n|\geq\alpha}u(Y_n)] + \mathbb{E}[\mathbb{I}_{|Y_n|<\alpha}u(Y_n)].$$

För den första termen fås

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\mathbb{I}_{|Y_n|\geq\alpha}u(Y_n)]| &\leq M \cdot \mathbb{P}(|Y_n| \geq \alpha) \\ &= M \cdot \mathbb{P}\left(|S_n - p| \geq \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) \\ &\leq \frac{pq}{\alpha^2}M \text{ (enligt Lemma 2.5).} \end{aligned}$$

För den andra termen fås

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{|Y_n|<\alpha}u(Y_n)] = \sum_{pn-\alpha\sqrt{n}\leq k\leq pn+\alpha\sqrt{n}} \mathbb{P}\left[S_n = \frac{k}{n}\right] u\left(\sqrt{n}\left(\frac{k}{n} - p\right)\right). \quad (2.1)$$

För att studera (2.1) estimeras först $\ln\left(\mathbb{P}\left[S_n = \frac{k}{n}\right]\right)$ med hjälp av Lemma 2.6:

$$\begin{aligned} \ln\left(\mathbb{P}\left[S_n = \frac{k}{n}\right]\right) &= \ln(n!) - \ln(k!) - \ln((n-k)!) + k\ln p + (n-k)\ln q \quad (2.2) \\ &= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) - k\ln k + k - \frac{1}{2}\ln(2\pi k) - (n-k)\ln(n-k) \\ &+ n - k - \frac{1}{2}\ln(2\pi(n-k)) + \epsilon(n) - \epsilon(k) - \epsilon(n-k) + k\ln p + (n-k)\ln q \\ &= (k + (n-k))\ln n - k\ln k + k\ln p + (n-k)(\ln q - \ln(n-k)) \\ &+ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{k(n-k)2\pi}\right) + \epsilon(n) - \epsilon(k) - \epsilon(n-k) \\ &= k\ln\left(\frac{np}{k}\right) + (n-k)\ln\left(\frac{nq}{n-k}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n}{k(n-k)2\pi}\right) \\ &+ \epsilon(n) - \epsilon(k) - \epsilon(n-k). \end{aligned}$$

Vi fortsätter nu med att uppskatta logaritmkvoterna i föregående uttryck med hjälp av logaritmfunktionens Maclaurinutveckling ($\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$). För att åstadkomma detta görs först variabelbytet $k = np+y\sqrt{n}$, eller ekvivalent $y = \sqrt{n}\left(\frac{k}{n} - p\right)$, där $|y| < \alpha$.

Nu fås för $n >> \alpha$, och genom utnyttjande av att
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...$ då $x < 1$, att

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{np}{k}\right) &= -\ln\left(1 + \frac{y}{p\sqrt{n}}\right) \\ &= -\left(\frac{y}{p\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2p^2n} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^3}{p^3n^{3/2}}\right)\right).\end{aligned}$$

Med feltermen avses att det existerar en konstant $C > 0$ så att
$|\ln\left(\frac{np}{k}\right) + \frac{y}{p\sqrt{n}} - \frac{y^2}{2p^2n}| \leq C\frac{\alpha^3}{p^3n^{3/2}}$ för alla $n > n_0(\alpha)$. På samma sätt fås även

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{nq}{n-k}\right) &= -\ln\left(\frac{n-np-y\sqrt{n}}{nq}\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{y}{q\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{y}{q\sqrt{n}} + \frac{y^2}{2q^2n} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^3}{q^3n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

Sammanlagt har man nu

$$\begin{aligned}k\ln\left(\frac{np}{k}\right) + (n-k)\ln\left(\frac{nq}{n-k}\right) &= (np + y\sqrt{n})\left(-\frac{y}{p\sqrt{n}} + \frac{y^2}{2p^2n} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^3}{p^3n^{3/2}}\right)\right) \\ &\quad + (nq - y\sqrt{n})\left(\frac{y}{q\sqrt{n}} + \frac{y^2}{2q^2n} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^3}{q^3n^{3/2}}\right)\right) \\ &= \underbrace{-\frac{y^2}{p} - \frac{y^2}{q} + \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}}_{=-\frac{y^2}{2pq}} \underbrace{-\frac{y^3}{2p^2\sqrt{n}} - \frac{y^3}{2q^2\sqrt{n}}}_{=\mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2})} + \mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

På samma sätt fås ännu att

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n}{k(n-k)}\right) &= \ln\left(\frac{n}{(np+y\sqrt{n})(nq-y\sqrt{n})}\right) \\ &= -\ln\left(\left(p + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\left(q - \frac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) - \ln n \\ &= -\ln(pq) + \mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2}) - \ln n.\end{aligned}$$

Genom att lägga samman de föregående utredningarna fås nu en estimering av (2.2). Nu noteras att det för Stirling-approximationens feltermer gäller att $\epsilon(j) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{j}\right)$, så för $k = np + y\sqrt{n}$, $|y| < \alpha$, gäller att alla
$\epsilon(n), \epsilon(k), \epsilon(n-k) = \mathcal{O}^{(\alpha)}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Nu fås

$$\begin{aligned}\ln\left(\mathbb{P}\left[S_n = \frac{k}{n}\right]\right) &= -\frac{y^2}{2pq} - \frac{1}{2}\ln(pq) - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2}) + \mathcal{O}^{(\alpha)}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2\pi npq) - \frac{y^2}{2pq} + \mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2}).\end{aligned}$$

Eller med andra ord

$$\mathbb{P}\left[S_n = \frac{k}{n}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{y^2}{2pq}}(1 + \mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2})), \text{ ty } e^x = 1 + \mathcal{O}(x) \text{ för små } x.$$

Låt oss nu gå tillbaka till (2.1), då fås

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{|Y_n|<\alpha} u(Y_n)] = \sum_{pn-\alpha\sqrt{n}\le k\le pn+\alpha\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}} e^{-\frac{y^2}{2pq}}(1 + \mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2}))u(y)\frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (2.3)$$

Notera att om k tar heltalssteg, så tar $y = \frac{k-np}{\sqrt{n}}$ steg av längd $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Därav fås att

$$\begin{aligned}(2.3) &= \sum_{\alpha\le y\le\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}} e^{-\frac{y^2}{2pq}}(1 + \mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2}))u(y)\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi pq}} e^{-\frac{y^2}{2pq}} u(y)dy =: I_\alpha \text{ för } \alpha \text{ fixt.}\end{aligned}$$

Nu noteras att $\mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2})$ försvinner vid gränsövergången, ty $\mathcal{O}^{(\alpha)}(n^{-1/2}) \le \frac{C}{n^{1/2}}$ där C är oberoende av y. Detta är med andra ord en Riemannsumma, vars gränsvärde då $n \to \infty$ är en Riemannintegral. Vidare noteras att $I_\infty = \mathbb{E}_{\mathcal{N}(0,pq)}[u(X)]$.

Vi har nu introducerat en auxiliär parameter, $\alpha > 0$, och visat att det för alla $\alpha > 0$ gäller att

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(Y_n)] = A_{n,\alpha} + B_{n,\alpha}, \text{ där } |A_{n,\alpha}| &\le \frac{pqM}{\alpha^2} \text{ för alla } n \\ \text{och } B_{n,\alpha} &\xrightarrow{n\to\infty} I_\alpha \text{ för alla } \alpha.\end{aligned}$$

I synnerhet gäller att $\mathbb{E}[u(Y_n)] \xrightarrow{n\to\infty} I_\infty$, ty för varje $\epsilon > 0$ existerar det α_0 och n_{0,α_0} sådana att

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[u(Y_n)] - I_\infty| &\le |A_{n,\alpha}| + |B_{n,\alpha} - I_\alpha| + |I_\alpha - I_\infty| \\ &\le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \text{ för } \alpha > \alpha_0 \text{ och } n > n_{0,\alpha_0}.\end{aligned}$$

□

2.3 En gissning till brownsk rörelse

Målet i detta kapitel är att utnyttja föregående resultat för att visa att normalfördelningen uppstår som ett gränsvärde av en skalad, enkel slumpvandring, och att den gör det i form av en vektor i $\mathbb{R}^n$ med oberoende komponenter. Mera om detta efter följande två lemman, som behövs för att åstadkomma detta.

Låt nu $\overrightarrow{X_n}$ vara definierade på sannolikhetsrummen $(\Omega_n,\mathcal{F}_n,\mathbb{P}_n)$ och $\overrightarrow{X}$ på $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, där $\overrightarrow{X_n}$ och $\overrightarrow{X}$ tar värden på $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B})$.

Definition 2.8. Fouriertransformen

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}],$$

där i är den imaginära enheten, kallas för den stokastiska variabelns X karakteristiska funktion. På samma sätt fås för flerdimensionella stokastiska variabler, $\overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^d$, att $\varphi_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{t}) = \mathbb{E}[e^{i\overrightarrow{t}^T\overrightarrow{X}}]$, där $\overrightarrow{t} \in \mathbb{R}^d$ och $\overrightarrow{t}^T$ är transponatet av vektorn $\overrightarrow{t}$.

Anmärkning 2.9. Den karakteristiska funktionen är egentligen en egenskap av slumpvariabelns, X, fördelning och inte av slumpvariabeln i sig. Man brukar trots det ofta hänvisa till slumpvariabeln istället för dess fördelning i notationen.

Anmärkning 2.10. Den karakteristiska funktionen existerar för alla värden på t.

Lemma 2.11. *lag*$(\overrightarrow{X_n})\xrightarrow{svagt}$ *lag*$(\overrightarrow{X})$ *om och endast om* $\varphi_{\overrightarrow{X_n}}(\overrightarrow{k}) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_{\overrightarrow{X}}(\overrightarrow{k})$ *för varje fast* $\overrightarrow{k} \in \mathbb{R}^d$.

Bevis. [14, Avsnitt 18.1]. □

Lemma 2.12. *Låt* $Y_j = (u_j,v_j)$*, där* $u_j \in \mathbb{R}^n$*,* $v_j \in \mathbb{R}^m$ *är* $\mathbb{P}_j$*-oberoende komponenter.*
Om lag$(u_j)\xrightarrow{svagt}$ *lag*(u) *(på* $\mathbb{R}^n$*) och lag*$(v_j)\xrightarrow{svagt}$ *lag*(v) *(på* $\mathbb{R}^m$*), så gäller lag*$(Y_j)\xrightarrow{svagt}$ (u,v) *(på* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*), med* (u,v) *oberoende kopplade.*

Bevis. Tag godtyckligt $\overrightarrow{\xi} \in \mathbb{R}^n$ och $\overrightarrow{\eta} \in \mathbb{R}^m$, med u_j och v_j oberoende. Då fås

$$\begin{aligned}
\varphi_{(u_j,v_j)}(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\eta}) &= \mathbb{E}_j[e^{i(\overrightarrow{\xi}u_j+\overrightarrow{\eta}v_j)}] \\
&= \mathbb{E}_j[e^{i\overrightarrow{\xi}u_j}]\cdot\mathbb{E}_j[e^{i\overrightarrow{\eta}v_j}], \text{ty } u_j,v_j \text{ oberoende} \\
&= \varphi_{u_j}(\overrightarrow{\xi})\cdot\varphi_{v_j}(\overrightarrow{\eta}) \xrightarrow{j\to\infty} \varphi_u(\overrightarrow{\xi})\varphi_v(\overrightarrow{\eta}), \text{enligt Lemma 2.11} \\
&= \varphi_{(u,v)}(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\eta}), \text{ty även } (u,v) \text{ oberoende kopplade.}
\end{aligned}$$

Nu fås enligt Lemma 2.11 att
$\text{lag}(Y_j)$=$\text{lag}((u_j,v_j))\xrightarrow{\text{svagt}}(u,v)$ då $j\to\infty$,
där (u,v) är en oberoende koppling av u och v.

$\square$

Låt oss nu övergå till slumpvandringen i fråga, nämligen $X_t^{(\delta)} := \sqrt{\delta}S_{\frac{t}{\delta}}$: fixera först ett litet $\delta > 0$ och sätt för t en multipel av δ. Låt slumpvandringen ta tidssteg δ och rumssteg $\pm\sqrt{\delta}$, där $\mathbb{P}(X_i = \sqrt{\delta}) = \mathbb{P}(X_i = -\sqrt{\delta}) = \frac{1}{2}$, och interpolera linjärt mellan δ-gittertider upp till tid t. Genom följande proposition lyckas man skapa en process, $(B_t)_{t\in[0,1]}$, på något sannolikhetsrum med egenskaperna:

- $B_0 = 0$.
- B_t har stationära och oberoende tillägg.
- $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ för varje $t \in [0,1]$.

Proposition 2.13. *Låt $0 = t_0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n \le 1$ vara givna. Då gäller att $lag\left(\sqrt{\delta}\left(S_{\frac{t_1}{\delta}},S_{\frac{t_2}{\delta}},...,S_{\frac{t_n}{\delta}}\right)\right) \xrightarrow{svagt} (B_{t_1},B_{t_2},...,B_{t_n})$ då $\delta\downarrow 0$, där $B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \sim \mathcal{N}(0,t_n - t_{n-1})$ och oberoende. Vi betecknar $B_0 = 0$.*

Bevis. Låt oss först undersöka fallet för slumpvandringen på heltalen S_n, det vill säga då vi har tidssteg av längd 1 och rumssteg av längd ±1.
Låt $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, där X_i oberoende och likafördelade med $X_i \sim$ *Rademacher*, det vill säga $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.
Nu noteras att $X_i = 2Y_i - 1$, där $Y_i \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$. Enligt Sats 2.7 gäller att $lag\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \frac{1}{2}n}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{\text{svagt}} \mathcal{N}(0,1)$ då $n\to\infty$. Härifrån följer att

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{\sqrt{n}} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (2Y_i - 1)}{\sqrt{n}} = \frac{2\sum_{i=1}^n Y_i - n}{\sqrt{n}}\\ &= \frac{2\left(\sum_{i=1}^n Y_i - \frac{n}{2}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \text{då } n\to\infty.\end{aligned}$$

Låt oss nu övergå till allmänt tidssteg av längd δ: då gäller $t = n\delta$, det vill säga $n = \frac{t}{\delta}$.
För $t = 1$ fås att $\sqrt{\delta}S_{\frac{1}{\delta}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, då $\delta\downarrow 0$, enligt ovanstående utredning.
För allmänt t fås genom tillämpning av Sats 2.7 att

$$\frac{S_{\frac{t}{\delta}}}{\sqrt{\frac{t}{\delta}}} = \frac{\sqrt{\delta}S_{\frac{t}{\delta}}}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \text{då } \delta \downarrow 0, \text{ eller med andra ord}$$
$$\sqrt{\delta}S_{\frac{t}{\delta}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,t), \text{ då } \delta \downarrow 0.$$

Nu fås, enligt ovanstående och Lemma 2.12, för vektorn $\sqrt{\delta}\left(S_{\frac{t_1}{\delta}},S_{\frac{t_2}{\delta}},\dots,S_{\frac{t_n}{\delta}}\right) \in \mathbb{R}^n$ att

$$\begin{aligned}
\sqrt{\delta}\left(S_{\frac{t_1}{\delta}}, S_{\frac{t_2}{\delta}},\dots,S_{\frac{t_n}{\delta}}\right) &= \sqrt{\delta}\left(S_{\frac{t_1}{\delta}},S_{\frac{t_1}{\delta}} + (S_{\frac{t_2}{\delta}} - S_{\frac{t_1}{\delta}}),\dots, S_{\frac{t_{n-1}}{\delta}} + (S_{\frac{t_n}{\delta}} - S_{\frac{t_{n-1}}{\delta}})\right) \\
&\xrightarrow[\delta\downarrow 0]{d} (B_{t_1},B_{t_1} + (B_{t_2} - B_{t_1}),\dots,B_{t_{n-1}} + (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})) \\
&= (B_{t_1},B_{t_2},\dots,B_{t_n}), \text{där } B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1}).
\end{aligned}$$

Detta gäller ty $S_{\frac{t_i}{\delta}}$ och $S_{\frac{t_{i+1}}{\delta}} - S_{\frac{t_i}{\delta}}$ är oberoende och då ger Lemma 2.12 att även vektorns $(B_{t_1} - B_0, B_{t_2} - B_{t_1},\dots,B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_1 - B_{t_n})$ komponenter är oberoende. Vidare ger Sats 2.7 (de Moivre-Laplace) enligt tidigare utredningar att
$B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1})$, ty $\sqrt{\delta}(S_{\frac{t_n}{\delta}} - S_{\frac{t_{n-1}}{\delta}}) \xrightarrow[\delta\downarrow 0]{d} \mathcal{N}(0, t_n - t_{n-1})$. □

Anmärkning 2.14. Härnäst skulle målsättningen vara att vilja skapa en process som förutom de ovanstående egenskaperna även har egenskapen att funktionen $t \mapsto B_t$ är kontinuerlig i t med sannolikhet 1, och detta på rummet $C([0,1],\mathbb{R})$. Att en sådan process existerar är på intet sätt självklart från ovanstående utredningar utan kräver en hel del mera arbete. Grundtanken med detta kapitel är att visa den historiska aspekten kring egenskaper kopplade till brownsk rörelse, och motivera möjligheten till att en sådan process kan tänkas existera. Av ovanstående utredningar verkar det hoppfullt att en sådan process skulle kunna existera. Detta motiverar även axiomen som tas för den pre-brownska rörelsen i nästa kapitel: det vill säga att en process med alla egenskaper av brownsk rörelse, förutom kontinuitetsegenskapen, existerar.

Kapitel 3

Den brownska brons konstruktion

Vår första konstruktion av brownsk rörelse sker genom den brownska brons konstruktion. Vi inleder först med lite bakgrundsteori förrän vi går över till att definiera funktionsföljden i fråga, och bevisa några egenskaper hos följden. Därefter bevisas konvergensen av följden till en kontinuerlig funktion med egenskaperna av brownsk rörelse: detta sker i Lemma 3.15 och Sats 3.17.

3.1 Den brownska slumpprocessen och -funktionen

I detta delkapitel behandlas grundläggande teori i anknytning till brownsk rörelse, som utgör grunden för resten av avhandlingen. Här tas begrepp som slumpprocess och slumpfunktion upp, och den exakta definitionen av brownsk rörelse ges. Funderingar kring vilket rum det är förnuftigt att definiera brownsk rörelse på tas även upp. Låt oss först inleda med några nödvändiga definitioner. Låt nu sannolikhetsrummet $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ vara givet.

Definition 3.1. Med en kontinuerlig slumpfunktion avses en stokastisk variabel som antar värden på rummet $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$.

Definition 3.2. En slumpprocess är en samling av reellvärda stokastiska variabler, $X(\cdot):\Omega\to\mathbb{R}^{[0,\infty)}$, på samma sannolikhetsrum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Här avser $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ rummet av reellvärda funktioner på $[0,\infty)$, och det förses med sigma-algebran $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$. Detta är den så kallade Kolmogorov-Daniell-sigma-algebran, det vill säga algebran genererad av alla ändligdimensionella Borel-marginaler:
$\{X(\cdot)\in\mathbb{R}^{[0,\infty)};(X(t_1),X(t_2),...,X(t_n))\in A\}$, där $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Anmärkning 3.3. Kolmogorov-Daniell-sigma-algebran är relativt svag: många "händelser" man är intresserad av är inte mätbara i denna sigma-algebra utan kräver kontinuerliga funktioners sigma-algebra. Problemet är att $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$ är för liten för ett rum så stort som $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Det är inte möjligt att konstruera ett sannolikhetsmått $\mathbb{P}$ på $(\mathbb{R}^{[0,\infty)},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ så att man skulle kunna bestämma en funktion i $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ genom att specifiera dess värden i endast ett numrerbart antal punkter: $\{X(\cdot) = f(\cdot)\}$, för givet $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, är exempelvis inte en händelse. Detta är i motsats till kontinuerliga funktioners sigma-algebra: för att bestämma en kontinuerlig funktion räcker det att specifiera dess värden i ett numrerbart antal punkter, vilket kommer visas senare. Man kan visa att den enda $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$-mätbara mängden som även tillhör rummet $C([0,\infty),\mathbb{R})$ är den tomma mängden. Detta är orsaken till att man framöver hellre jobbar med sigma-algebran genererad av kontinuerliga funktioner försedda med supremum-normen.

Anmärkning 3.4. En slumpfunktion är alltid en slumpprocess, för genom att evaluera funktionen fås en slumpprocess.

Definition 3.5. En standard pre-brownsk rörelse, $B_{t\geq 0}$, är en slumpprocess på $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ med följande egenskaper:
1. $B_0 = 0$ n.s.
2. B_t har oberoende tillägg, det vill säga givet $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ gäller att tilläggen $B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1),...,B(t_n) - B(t_{n-1})$ är oberoende.
3. $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ med $0 \leq s < t$.

Anmärkning 3.6. Vi noterar att en standard pre-brownsk rörelse existerar enligt Kolmogorovs utvidgningssats, [4, Theorem 2.2], och genom utnyttjande av elementära egenskaper hos gaussiska variabler.

Härnäst fortsätter vi med att definiera en slumpfunktion som kallas för standard brownsk rörelse, om en sådan existerar. Den fås genom att lägga till kravet att B_t är n.s. kontinuerlig till definitionen av den standard pre-brownska rörelsen.

Definition 3.7. En kontinuerlig slumpfunktion, $B_{t\in[0,1]} \in C([0,1],\mathbb{R})$, med egenskaperna av den standard pre-brownska rörelsen kallas för en standard brownsk rörelse om en sådan existerar.

Låt oss fortsätta med två nödvändiga lemman.

Lemma 3.8. *(Dynkins identifikationssats) Låt $\mathbb{P},\mathbb{Q}$ vara sannolikhetsmått på samma måttrum $(\Omega,\mathcal{F})$. Låt vidare samlingen $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ utgöra ett π-system på Ω, det vill säga den är sluten med avseende på ändliga snitt, och anta att $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$. Om $\mathbb{P}[A] = \mathbb{Q}[A]$ för alla $A \in \mathcal{C}$ så gäller att $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.*

Bevis. [3, Korollarium 6.1] □

Lemma 3.9. *Låt $S := (C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$, och låt $\mathcal{B}(S)$ vara Borel-sigma-algebran på S. Låt vidare $\mathcal{C}$ utgöra samlingen av alla händelser på formen $\{f : (f(t_1),...,f(t_n)) \in B_1 \times ... \times B_n\}$ med $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n \leq 1$, och $B_i = (\alpha_i,\beta_i)$, där $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, för $i = 1,2,...,n$. Då gäller $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(S)$.*

Bevis. Låt oss först visa att $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(S)$:
Låt π_{t_i}, $S \to \mathbb{R}$, vara avbildningen $\pi_{t_i}(f) = f(t_i)$. Då kan man skriva $\mathcal{C} = \cap_{i=1}^n {\pi_{t_i}}^{-1}(B_i)$. Notera först att ${\pi_t}^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}(S)$ för varje $0 \leq t \leq 1$ och $i = 1,2,...,n$, ty π-funktionens urbild av öppna intervall är öppen i S eftersom π-funktionen är kontinuerlig. Av detta följer att ${\pi_t}^{-1}(B_i)$ är en öppen mängd i S, och eftersom $\mathcal{B}(S)$ genereras av alla öppna mängder i S följer att ${\pi_t}^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}(S)$. Eftersom $\mathcal{B}(S)$ är en sigma-algebra följer det att även snittet av dessa tillhör $\mathcal{B}(S)$. Med andra ord gäller att $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(S)$ och således även $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(S)$.

Låt oss härnäst visa att även $\mathcal{B}(S) \subset \sigma(\mathcal{C})$:
Eftersom S är separabelt, [10, Exercise], räcker det att visa att varje öppet klot i S ligger i $\sigma(\mathcal{C})$; av detta följer att varje öppen mängd i S ligger i $\sigma(\mathcal{C})$. Notera härnäst att varje öppet klot, $B(f,\epsilon)$, i S kan skrivas som

$$B(f,\epsilon) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} {\pi_t}^{-1} \left(f(t) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\epsilon, f(t) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\epsilon \right).$$

Detta gäller, ty om $f,g \in S$ och det existerar n sådant att $|f(t)-g(t)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right)\epsilon$ för varje $t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, följer att $d(f,g) = \sup_{t\in[0,1]}|f(t) - g(t)| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\epsilon < \epsilon$, eftersom f,g kontinuerliga och $\mathbb{Q}$ ligger tätt i $\mathbb{R}$.
Och omvänt: Om $d(f,g) < \epsilon$, så existerar $n \in \mathbb{N}$ sådant att $d(f,g) < \left(1 - \frac{1}{n}\right)\epsilon$. Detta implicerar i sin tur att $|f(t) - g(t)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right)\epsilon$ för varje $t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.
Vi har nu visat att varje öppet klot i S kan uttryckas som en numrerbar union av numrerbara snitt av element i $\mathcal{C}$, och därför gäller att $B(f,\epsilon) \in \sigma(\mathcal{C})$. Av separabiliteten följer nu att $\mathcal{B}(S) \subset \sigma(\mathcal{C})$. □

Man kan nu konstatera att *en brownsk rörelse är entydig*: Genom att betrakta funktionsrummet $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ utgör varje slumpvandring av processen som betraktas ett utfall. Vi kommer i fortsättningen att betrakta sigma-algebran som genereras av ändligdimensionella marginaler, det vill säga händelser på formen $\{\omega \in \Omega \mid B_{t_1}(\omega) \in A_1,...,B_{t_n}(\omega) \in A_n\}$, där $A_1,...,A_n$ är Borelmängder. Lemma 3.9 i kombination med Lemma 3.8 ger att om vi lyckas skapa brownsk rörelse på sigma-algebran som genereras av dessa så har vi samtidigt skapat brownsk rörelse på sigma-algebran genererad av funktionsrummet av kontinuerliga funktioner försedda med supremum-normen. Nästa mål är nu att konstruera en slumpfunktion med egenskaperna av brownsk rörelse för ändligdimensionella marginaler. Dynkins sats, Lemma 3.8, i kombination med Lemma 3.9 ger att den motsvarande processen karakteriserar slumpfunktionen, och detta ger entydigheten av brownsk rörelse. Om man med andra ord har identifierat brownsk rörelse kan man vara säker på att den är unik.

Låt oss fortsätta med några resultat om betingade fördelningar, som vi kommer ha nytta av framöver.

3.2 Betingade fördelningar

Formellt avses med betingade fördelningen av Y givet X den reguljära betingade lagen av Y givet X. För att minska formaliteten antas följande svagare definition genom densitetsfunktioner, som sammanfaller med förstnämnda när densitetsfunktionerna i fråga existerar.

Definition 3.10. Låt X och Y vara reella stokastiska variabler med täthetsfunktioner p_X respektive p_Y. Låt $A = [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta] \subseteq \mathbb{R}^2$. Om $\mathbb{P}[(X,Y) \in A] = \int_\alpha^\beta p_X(x) \int_\gamma^\delta p_{Y|X}(y,x)dydx$ gäller för varje rektangel $A \subseteq \mathbb{R}^2$, så definierar $p_{Y|X}(\cdot,x)$ den betingade tätheten av y givet att $X = x$.

Definition 3.11. Med $p(t;x,y)$ avses täthetsfunktionen av $\mathcal{N}(y,t)$ i punkten x, det vill säga $p(t;x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t^2}}$.

Lemma 3.12. *Antag att* $B_t \sim \mathcal{N}(0,t) = B_{t/2}^{(1)} + B_{t/2}^{(2)}$ *där* $B_{t/2}^{(1)}, B_{t/2}^{(2)}$ *är oberoende* $\mathcal{N}(0,t/2)$*-fördelade stokastiska variabler, och* $t \geq 0$*. Då gäller att* $B_{t/2}^{(1)} \mid B_t = b_t \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$*, där* $\mu := \frac{b_t}{2}$ *och* $\sigma^2 := \frac{t}{4}$*. I synnerhet om* $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ *och* $B_{t/2}^{(1)}$ *har denna betingade densitet, så följer det att* $B_{t/2}^{(1)}$ *och* $(B_t - B_{t/2}^{(1)})$ *är oberoende, samt att båda är* $\mathcal{N}(0,t/2)$*-fördelade.*

Bevis. Låt $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A = [\alpha,\beta] \times [\gamma,\delta]$. vi vill utröna $\mathbb{P}[(B_{t/2}^{(1)},B_t) \in A]$.

För att bestämma denna sannolikhet görs först variabelbytet
$$\begin{cases} B^{(1)}_{t/2} = B^{(1)}_{t/2} \\ B_t = B^{(1)}_{t/2} + (B_t - B^{(1)}_{t/2}) = B^{(1)}_{t/2} + B^{(2)}_{t/2}. \end{cases}$$
Detta kan uttryckas med hjälp av följande matrisekvation
$$\begin{pmatrix} B^{(1)}_{t/2} \\ B_t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=M} \begin{pmatrix} B^{(1)}_{t/2} \\ B^{(2)}_{t/2} \end{pmatrix} := g(B^{(1)}_{t/2}, B^{(1)}_{t/2}).$$
Notera att $\det(M) = 1$, nu fås härmed att
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(B^{(1)}_{t/2}, B_t) \in A] &= \mathbb{P}[(B^{(1)}_{t/2}, B^{(2)}_{t/2}) \in M^{-1}(A)] \\ &= \int_{M^{-1}(A)} p\left(\frac{t}{2}; 0, n_1\right) p\left(\frac{t}{2}; 0, n_2\right) dn_1 dn_2 \\ &= \int_A p\left(\frac{t}{2}; 0, b_{t/2}\right) p\left(\frac{t}{2}; b_{t/2}, b_t\right) \cdot 1 db_{t/2} db_t \qquad \text{(genom variabelbyte).} \end{aligned}$$
Ovanför satisfierar n_1, n_2 matrisekvationen $\begin{pmatrix} b_{t/2} \\ b_t \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$.
Vidare fås via lite algebra att
$$\begin{aligned} p\left(\frac{t}{2}; 0, b_{t/2}\right) \cdot p\left(\frac{t}{2}; b_{t/2}, b_t\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{t}{2}}} e^{-\frac{(b_{t/2})^2}{2\frac{t}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{t}{2}}} e^{-\frac{(b_{t/2}-b_t)^2}{2\frac{t}{2}}} \\ &= \frac{1}{\pi t} e^{-\frac{1}{t}\left(b^2_{t/2} + (b_{t/2} - b_t)^2\right)} \\ &= \frac{1}{\pi t} e^{-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2} b_t^2 + 2(b_{t/2} - \frac{1}{2} b_t)^2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} e^{-\frac{b_t^2}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sqrt{t}}{2}} e^{-\frac{\left(b_{t/2} - \frac{b_t}{2}\right)^2}{\frac{t}{2}}} \\ &= p(t; 0, b_t) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(b_{t/2}-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{där } \mu = \frac{b_t}{2} \text{ och } \sigma = \frac{\sqrt{t}}{2}. \end{aligned}$$
Nu fås via tillämpning av Fubinis sats att
$\mathbb{P}[(B^{(1)}_{t/2}, B_t) \in A] = \int_\gamma^\delta p(t; 0, b_t) \left(\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(b_{t/2}-\mu)^2}{2\sigma^2}} db_{t/2} \right) db_t.$
Eftersom rektangeln A var godtyckligt vald kan vi nu från Definition 3.10 identifiera $B^{(1)}_{t/2} \mid B_t = b_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{b_t}{2}, \frac{t}{4}\right)$. $\square$

3.3 Definition av approximatfunktionerna

Vi skall nu fortsätta med att konstruera en så kallad brownsk bro genom att först definiera och konstruera approximatfunktioner. Låt oss först med $I(n)$ beteckna mängden av udda heltal mellan 0 och 2^n. Exempelvis är $I(0) = \{1\}$,$I(2) = \{1{,}3\}$ och så vidare. Med ett dyadiskt bråk avses bråk på formen $\frac{a}{2^b}$, där a är ett heltal och b ett naturligt tal. Idén är att om en brownsk rörelse existerar så kan vi definiera den genom att upptäcka dess bana på $[0{,}1]$ i tätare och tätare gitter av formen $\{\frac{1}{2^k},\frac{2}{2^k},\frac{3}{2^k},...,\frac{2^k-1}{2^k},1\}$, där $k = 1{,}2{,}3,...$

För att skapa dessa gitter börjar vi med en numrerbar samling $\{\xi_k^{(n)}; k \in I(n), n = 0{,}1,...\}$ av oberoende $\mathcal{N}(0{,}1)$-fördelade stokastiska variabler. Låt oss definiera en process $B^{(n)} = \{B_t^{(n)}; 0 \leq t \leq 1\}$ genom linjär interpolering och rekursion på följande sätt:

För $n \geq 1$ likställes $B_{2k/2^n}^{(n)} (= B_{k/2^{n-1}}^{(n)})$ med $B_{k/2^{n-1}}^{(n-1)}$ för $k = 0{,}1,...,2^{n-1}$. Med andra ord behöver man endast definiera $B_{k/2^n}^{(n)}$ för $k \in I(n)$ och varje n.
Som startvärden för processen, då $n = 0$, sättes $B_0^{(0)} = 0$, $B_1^{(0)} = \xi_1^{(0)}, 0 \leq t \leq 1$.

Definiera $B_t^{(0)} = t\xi_1^{(0)}$ genom linjär interpolering. Nu fortsätter man rekursivt på så vis att om värdena för $B_{k/2^{n-1}}^{(n-1)}$, $k = 0{,}1,...,2^{n-1}$ är givna, det vill säga $B_t^{(n-1)}$ är definierade för varje $0 \leq t \leq 1$ genom linjär interpolering, så definieras $B_{k/2^n}^{(n)}$ i enlighet med Lemma 3.12 enligt följande:

$$B_{k/2^n}^{(n)} := \underbrace{\frac{1}{2}\left(B_{(k-1)/2^n}^{(n-1)} + B_{(k+1)/2^n}^{(n-1)}\right)}_{=\mu} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}}_{=\sigma}\xi_k^{(n)}. \tag{3.1}$$

Med andra ord har den rätta definitionen gissats utgående från Lemma 3.12. För att ge en mera konkret bild av processen: Man börjar från det nollte steget där man först fixerar $B_0^{(0)} = 0$, och lottar ut punkten $B_1^{(0)}$ enligt en standard-normalfördelning. Därefter interpolerar man dessa punkter linjärt och går över till steget av ordning 1; här halveras intervallet och punkten $B_{\frac{1}{2}}^{(1)}$ lottas ut enligt en $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$-fördelning i enlighet med Lemma 3.12. Därefter interpoleras dessa punkter linjärt.

När man i varje steg har punkterna utlottade interpoleras dessa linjärt och man övergår sedan till nästa steg, med dessa punkter som noder, och halverar varje delintervall och lottar ut nya punkter vid varje intervallmitt enligt den lämpliga normalfördelningen i enlighet med Lemma 3.12. Vi har åskådliggjort några steg i denna process i Figur 1.1 för att ge läsaren en intuitiv bild av processen. Således får man tätare och tätare gitter; man skapar därmed en funktionsföljd, $B_t^{(n)}(\omega), 0 \leq t \leq 1$. Målsättningen är att visa att funktionsföljden $B_t^{(n)}(\omega), 0 \leq t \leq 1$, konvergerar likformigt i t till en kontinuerlig funktion, $B_t(\omega)$, med egenskaperna av definitionen av brownsk rörelse. Med andra ord kan man på detta sätt skapa en slumpfunktion, som man kallar för brownsk rörelse. Målet är alltså att visa existensen av en sådan slumpfunktion.

3.4 Egenskaper hos funktionsföljden

1) Normala och oberoende tillägg

Lemma 3.13. *Tilläggen* $\{B^{(n)}_{k/2^n} - B^{(n)}_{(k-1)/2^n}\}_{k=1}^{2^n}$ *är oberoende* $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2^n})$*-fördelade stokastiska variabler.*

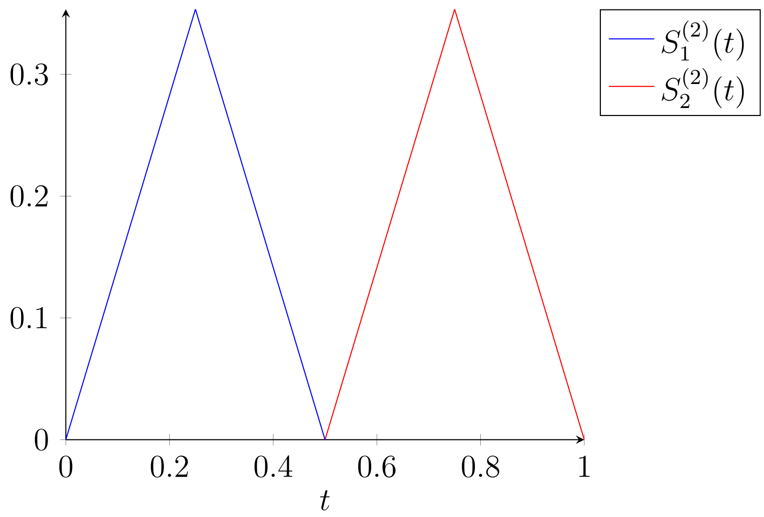
Bevis. Vi visar detta med induktion på $n = 0,1,2,...$ Basfallet har redan tidigare konstaterats gälla.
Som induktionsantagande antas att påståendet gäller för $n-1$, det vill säga att $\{B^{(n-1)}_{k/2^{n-1}} - B^{(n-1)}_{(k-1)/2^{n-1}}\}_{k=1}^{2^{n-1}}$ är oberoende $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2^{n-1}})$-fördelade stokastiska variabler. Vidare kan utan inskränkning antas att k är jämnt, ty endera k eller $k+1$ är jämnt.

För induktionssteget tillämpas lemma 3.12: låt $t = \frac{1}{2^{n-1}}$, och definiera $B^{(1)}_{t/2} := B^{(n)}_{(k+1)/2^n} - B^{(n)}_{k/2^n}$ och $B^{(2)}_{t/2} := B^{(n)}_{(k+2)/2^n} - B^{(n)}_{(k+1)/2^n}$. Induktionsantagandet ger att $B^{(1)}_{t/2} + B^{(2)}_{t/2} \sim \mathcal{N}(0,t)$. Av detta och Ekvation (3.1) följer att villkoren i Lemma 3.12 är uppfyllda. Lemma 3.12 ger nu att $B^{(1)}_{t/2}$ och $B^{(2)}_{t/2}$ båda är oberoende $\mathcal{N}(0,t/2) = \mathcal{N}(0,\frac{1}{2^n})$-fördelade stokastiska variabler. Detta slutför induktionssteget och induktionsbeviset är klart. □

2) Uttryck med Schauder-funktioner

Nästa mål är att ge en lämpligare representation av processerna $B^{(n)}_t$ med hjälp av de så kallade Schauder-funktionerna, $S^{(n)}_k(t)$, där $0 \leq t \leq 1$. Schauder-funktionen som svarar mot $n = 0$ ges av $S^{(0)}_1(t) = t$, och för $n \geq 1$ är de så kallade tältfunktioner med höjd $2^{-(n+1)/2}$. Dessa är centrerade vid punkterna $\frac{k}{2^n}$, där $k \in I(n)$, och har nollställen vid punkterna $\frac{k-1}{2^n}$ och $\frac{k+1}{2^n}$. Samtidigt är samlingen $(S^{(n)}_k)_{k\in I(n)}$ för varje fixt n icke-överlappande för olika värden på $k \in I(n)$.
För att ge en konkret bild av Schauder-funktionerna illustreras fallet med $n = 2$ grafiskt i Figur 3.1.

Lemma 3.14. *Processen* $B^{(n)}_t$, $0 \leq t \leq 1$, *kan framställas med hjälp av Schauder-*



Figur 3.1: Schauderfunktionerna $S_1^{(2)}(t)$ och $S_2^{(2)}(t)$.

funktionerna på följande sätt:

$$B_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in I(m)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^{(m)}(t), 0 \leq t \leq 1, n \geq 0. \tag{3.2}$$

Bevis. Vi bevisar lemmat med hjälp av induktion.
Vi börjar med basfallet, då ger (3.2) att
$B_t^{(0)}(\omega) = \xi_1^{(0)}(\omega) S_1^{(0)}(t) = \xi_1^{(0)}(\omega)t$, vilket är samma uttryck som vi tidigare härledde genom linjär interpolation. Basfallet är alltså uppfyllt.
Som induktionsantagande antas att (3.2) gäller för $n-1$, det vill säga att $B_t^{(n-1)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k \in I(m)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^{(m)}(t)$.

För induktionssteget noteras först att vid övergång från steg (av ordning) $n-1$ till steg (av ordning) n, enligt (3.1) för dyadiska tal, svarar detta precis mot att addera termerna $S_k^{(m)}(t)\xi_k^{(m)}$ till steget $n-1$ på så vis att Schauderfunktionernas ”hörn” fixeras vid de dyadiska noderna som genererats vid steg $n-1$.
Detta motiverar den första likheten i följande kedja av likheter för induktions-

steget:

$$\begin{aligned}
B_t^{(n)}(\omega) &= B_t^{(n-1)}(\omega) + \sum_{k\in I(n)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^m(t) \\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k\in I(m)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^{(m)}(t) + \sum_{k\in I(n)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^m(t) \text{ (enligt induktionsantagandet)} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k\in I(m)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^{(m)}(t).
\end{aligned}$$

Induktionssteget är härmed bevisat.
Vi har nu med induktion bevisat framställningen av $B_t^{(n)}$, $0 \le t \le 1$, på den betydligt mer användbara formen (3.2). □

3.5 Konvergensen av följden

Lemma 3.15. *Funktionsföljden* $\{B_t^{(n)}(\omega); 0 \le t \le 1\}$, *med* $n \ge 0$ *och* $B_t^{(n)}(\omega)$ *given enligt* (3.2), *konvergerar likformigt i* t *till en kontinuerlig funktion* $\{B_t(\omega); 0 \le t \le 1\}$ *för varje* $\omega \in \Omega$, *då* $n \to \infty$.

Bevis. Låt $b_n := \max_{k\in I(n)} |\xi_k^{(n)}|$. Då fås för $x > 0$ att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|\xi_k^{(n)}| > x] &= 2\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \text{ ty normalfördelningen symmetrisk} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&\le \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \int_x^\infty (-u) e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \Big/_x^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.
\end{aligned}$$

Genom utnyttjande av föregående fås nu att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[b_n > n] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k\in I(n)} \{|\xi_k^{(n)}| > n\}\right] \\
&\leq \sum_{k\in I(n)} \mathbb{P}[|\xi_k^{(n)}| > n] \\
&\leq 2^n \mathbb{P}[|\xi_1^{(n)}| > n], \text{ ty } \xi_k^{(n)} \text{ oberoende och likafördelade} \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n e^{-\frac{n^2}{2}}}{n}, \text{ för } n \geq 1 \ .
\end{aligned}$$

Vidare inses genom tillämpning av kvotkriteriet att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n e^{-\frac{n^2}{2}}}{n} < \infty$, det vill säga $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[b_n > n] < \infty$. Nu ger Borel-Cantellis lemma, [3, Theorem 10.5], att $\mathbb{P}[b_n > n \text{ i.o}] = 0$. Med andra ord existerar en mängd $\tilde{\Omega}$, med $\mathbb{P}[\tilde{\Omega}] = 1$, sådan att för varje $\omega \in \tilde{\Omega}$ existerar ett heltal $n(\omega)$ sådant att $b_n(\omega) \leq n$ för varje $n \geq n(\omega)$. Vidare fås nu genom utnyttjande av detta att

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n(\omega)}^{\infty} \sum_{k\in I(n)} |\xi_k^{(n)} S_k^{(n)}(t)| &\leq \sum_{n=n(\omega)}^{\infty} n 2^{-\frac{n+1}{2}}, \text{ty } |S_k^{(n)}(t)| < 2^{-\frac{n+1}{2}} \text{ för varje } k \\
&< \infty, \text{enligt exempelvis kvotkriteriet.}
\end{aligned}$$

Detta ger nu att $\lim_{n\to\infty} B_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k\in I(m)} \xi_k^{(m)} S_k^{(m)}(t) < \infty$ för alla $\omega \in \tilde{\Omega}$. Vi har härmed en absolut konvergerande serie, och det är ett allmänt faktum att absolut konvergerande serier konvergerar likformigt på kompakta mängder, vilket är en konsekvens av Dinis sats. Med andra ord konvergerar $B_t^{(n)}(\omega)$ likformigt i t till ett gränsvärde $B_t(\omega)$. Kontinuiteten för $\{B_t(\omega); 0 \leq t \leq 1\}$ följer automatiskt från den likformiga konvergensen. □

Anmärkning 3.16. Notera att det i ovanstående lemma klart gäller att de styckevis linjära approximatfunktionerna är $C([0,1],\mathbb{R})$-värda stokastiska variabler med avseende på Kolmogorov-Daniell-sigma-algebran. Nyss visades att dessa konvergerar n.s. i $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$, det vill säga likformigt. Allmänt gäller att om ett gränsvärde n.s. existerar för mätbara stokastiska variabler, som tar värden på ett metriskt rum, så är även gränsvärdet en mätbar stokastisk variabel på samma rum. Sammantaget fås alltså att gränsfunktionen antar värden på rummet $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$, det vill säga är en slumpfunktion i Kolmogorov-Daniell-sigma-algebran, som sig bör.

3.6 En identifikation av gränsfunktionen

Härnäst visas att denna gränsfunktion har egenskaperna av definitionen av brownsk rörelse.

Sats 3.17. *Med* $\{B_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ *enligt* (3.2) *och med* $B_t = \lim_{n\to\infty} B_t^{(n)}$ *har processen* $\{B_t; 0 \le t \le 1\}$ *oberoende tillägg, och* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0,t-s)$ *för* $0 \le s < t \le 1$.

Bevis. Anta nu att $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n \le 1$ är givna, vi vill nu visa att tilläggen $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^{n}$ är oberoende $\mathcal{N}(0,t_j - t_{j-1})$-fördelade stokastiska variabler. Påståendet har redan bevisats för på varandra följande dyadiska tidpunkter, det vill säga det har visats att tilläggen $\{B_{k/2^n}^{(n)} - B_{(k-1)/2^n}^{(n)}\}_{k=1}^{2^n}$ är oberoende $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2^n})$-fördelade stokastiska variabler.

Vidare konstateras, givet $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n \le 1$ med alla t_j dyadiska bråk, att tilläggen $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^{n}$ är oberoende $\mathcal{N}(0,t_j - t_{j-1})$-fördelade stokastiska variabler, ty det tätaste gittret är det som betraktas. För detta gitter har nyss visats att påståendet gäller för på varandra följande dyadiska bråk, och faktumet att summan av oberoende normalfördelningar är en normalfördelning med väntevärdena och varianserna adderade gör att det även gäller för vilka som helst dyadiska bråk på [0,1].

Nu skall vi ännu visa att detta gäller för alla $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n \le 1$, även om dessa inte utgörs av dyadiska bråk. Låt oss beteckna dyadiska bråk med t'. Vi vill nu visa att $B_{t'} \xrightarrow{d} B_t$ då $t' \to t$, och att $\mathcal{N}(0,t') \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,t)$ då $t' \to t$. Av gränsvärdens entydighet följer det därefter att dessa måste vara lika, det vill säga att $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.

Vi visar först att $\mathcal{N}(0,t') \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,t)$, då $t' \to t$. Notera att dyadiska bråk ligger tätt på [0,1], vilket i sin tur gör att alla t på [0,1] kan uppskattas godtyckligt bra av dyadiska bråk. För att visa den svaga konvergensen vill vi visa att $\mathbb{E}[f(U')] \to \mathbb{E}[f(U)]$, då $t' \to t$, för alla kontinuerliga och begränsade funktioner f. Här är alltså $U' \sim \mathcal{N}(0,t')$ och $U \sim \mathcal{N}(0,t)$. Vi vill visa att $\lim_{t'\to t} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t'}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t'}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t}} f(x)dx$.
Notera att integranden i vänsterledet är begränsad av en övre gräns, ty $\frac{1}{\sqrt{t'}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t'}}$ är begränsad eftersom det existerar konstanter l,L sådana att
$l \le t' \le L$ då $t' \to t$. Genom att vidare ersätta $f(x)$ med $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ fås en övre gräns och denna övre gräns är integrerbar. Villkoren för att tillämpa den dominerade konvergenssatsen, [3, Theorem 9.1(f)], är därmed uppfyllda och

man kan flytta in gränsövergången under integraltecknet, då fås:

$$\begin{aligned}\lim_{t'\to t}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{t'}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t'}}f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}}\lim_{t'\to t}\frac{1}{\sqrt{t'}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t'}}f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t}}f(x)dx.\end{aligned}$$

Vi har nu visat att $\mathcal{N}(0,t') \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,t)$ för alla dyadiska tider $0 < t' < 1$.

Vi visar nu ännu att $B_{t'} \xrightarrow{d} B_t$ då $t' \to t$. Enligt definitionen vill vi visa att $\mathbb{E}[f(B_{t'})] \to \mathbb{E}[f(B_t)]$, då $t' \to t$, för alla kontinuerliga och begränsade funktioner f. Av kontinuiteten följer att $B_{t'} \to B_t$ då $t' \to t$. Det gäller även att $f(B_{t'})$ är begränsad, ty f är begränsad. Av dominerade konvergenssatsen följer nu att $\mathbb{E}[f(B_{t'})] \to \mathbb{E}[f(B_t)]$ då $t' \to t$, och påståendet är bevisat.

Härmed gäller att $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$. Genom att utnyttja detta, samt Lemma 2.12, fås nu slutligen att tilläggen $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^n$ de facto är oberoende $\mathcal{N}(0,t_j - t_{j-1})$-fördelade stokastiska variabler för alla reella $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n \leq 1$. □

Vi har nu bevisat att processen B_t har alla de egenskaper av brownsk rörelse så som den definierats. På detta sätt har nu en brownsk rörelse konstruktivt skapats, och dess existens är härmed bevisad. Denna slumpfunktion är även entydig, vilket konstaterades tidigare. Detta är ett sätt att skapa brownsk rörelse.

Kapitel 4

Kolmogorov-Tjentsov-konstruktionen

Låt oss fortsätta med nästa konstruktion av brownsk rörelse, nämligen Kolmogorov-Tjentsov-konstruktionen. Vi inleder med ett nödvändigt lemma angående tilläggens moment hos normalfördelningen som behövs för att kunna utnyttja Kolmogorov-Tjentsov-satsen vid konstruktionen av brownsk rörelse.

Lemma 4.1. *Låt* $0 \leq s < t$ *och* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0,t-s)$. *Då existerar det för varje* $n \in \mathbb{N}$ *en positiv konstant* C_n *för vilken* $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] = C_n |t-s|^n$.

Bevis. Låt oss konstruera konstanten C_n:
Låt först $\sigma := \sqrt{t-s}$. Då fås

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^{2n} u^{2n} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du \text{ (subst. } x = \sigma u) \\
&= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du}_{:=L} .
\end{aligned}$$

Nu fås vidare att

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^\infty u^{2n}e^{-\frac{u^2}{2}}du, \text{ ty integranden jämn funktion}\\
&= 2\int_0^\infty \frac{(2v)^n}{\sqrt{2v}}e^{-v}dv \text{ (subst. } u=\sqrt{2v})\\
&= 2^{n+\frac{1}{2}}\underbrace{\int_0^\infty v^{n-\frac{1}{2}}e^{-v}dv}_{=\Gamma(n+\frac{1}{2})}\\
&= 2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Genom att sammanställa utredningarna kan man nu konstatera att

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] = \frac{2^{n+\frac{1}{2}}\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)|t-s|^n.$$

Vi har nu härlett $C_n = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (>0) för varje $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Låt oss fortsätta med några nödvändiga definitioner.

Definition 4.2. En (slump)funktion $(B_t)_{t\in[0,1]}$ på $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ säges vara Hölderkontinuerlig med exponent α om det för varje $T \in [0,1]$ gäller att $\sup_{0\le s<t\le T}\frac{|B_t-B_s|}{|t-s|^\alpha} < +\infty$.

Anmärkning 4.3. Några egenskaper hos Hölderkontinuerliga funktioner:

- Hölderkontinuitet med exponent α implicerar likformig kontinuitet och därmed kontinuitet.
- Hölderkontinuitet med exponent α implicerar Hölderkontinuitet med exponent α' för alla $\alpha' < \alpha$.
- Hölderkontinuitet med exponent $\alpha > 1$ implicerar att funktionen är konstant.
- Fallet $\alpha = 1$ är känt som Lipschitzkontinuitet. Kontinuerligt deriverbara funktioner är alltid Lipschitzkontinuerliga.

Anmärkning 4.4. De två första egenskaperna ovan fås direkt från definitionen medan den tredje kräver lite mera arbete för att bevisas. Den fjärde egenskapen följer av medelvärdessatsen, och av att derivatan är kontinuerlig.

Definition 4.5. Två slumpprocesser $X = (X_t)_t$ och $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_t$ på samma sannolikhetsrum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ är versioner av varandra om för varje t gäller att $\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) = \tilde{X}_t(\omega)\}] = 1$.

Vi går nu över till att allmänt formulera och bevisa kapitlets huvudresultat, Kolmogorov-Tjentsov-satsen. Med hjälp av denna och föregående lemma följer konstruktionen av brownsk rörelse naturligt.

Sats 4.6. *(Kolmogorov-Tjentsov) Låt $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ vara en slumpprocess. Antag att det existerar konstanter $p > 0, C > 0, \beta > 1$ sådana att det för varje $s,t \in [0,1]$ gäller att $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^p] \leq C|t-s|^\beta$. Då existerar en slumpfunktion $\tilde{X} \in C([0,1],\mathbb{R})$ som är en version av X, och som är Hölderkontinuerlig med exponent α för vilket som helst $\alpha < \frac{\beta-1}{p}$.*

Bevis. Låt $D_n := \{\frac{k}{2^n} \mid k \in \{0,1,2,...,2^n\}\}$ beteckna mängden av dyadiska tal av ordning n. Vi visar först att X är Hölderkontinuerlig med exponent α på de dyadiska talen $D := \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Låt oss först för fixerat n undersöka X indexerat av på varandra följande dyadiska tal. Låt $\alpha < \frac{\beta-1}{p}$. Då fås enligt Markovs olikhet, Lemma 2.4, att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > 2^{-n\alpha}\right] &= \mathbb{P}\left[|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^p > (2^{-n\alpha})^p\right] \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|^p\right]}{(2^{-n\alpha})^p} \\
&\leq \frac{C(2^{-n})^\beta}{(2^{-n\alpha})^p} = C2^{n(\alpha p-\beta)}.
\end{aligned}$$

Vidare fås nu genom utnyttjande av detta att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\max_{k=1,2,...,2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > 2^{-n\alpha}\right] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > 2^{-n\alpha}\right] \\
&\leq \sum_{k=1}^{2^n} \mathbb{P}\left[|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > 2^{-n\alpha}\right] \\
&\leq 2^n C 2^{n(\alpha p-\beta)} = C2^{n(1+\alpha p-\beta)}.
\end{aligned}$$

Nu fås

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[\max_{k=1,2,...,2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| > 2^{-n\alpha}\right] &\leq \sum_{n=0}^{\infty} C2^{n(1+\alpha p-\beta)} \\
&< +\infty, \text{ ty } 1+\alpha p-\beta < 0.
\end{aligned}$$

Nu ger Borel-Cantellis lemma, [3, Theorem 10.5], att $\max_{k=1,2,...,2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \leq 2^{-n\alpha}$ n.s., förutom för ändligt många värden på n. Detta ger nu att det existerar ett slumpmässigt men ändligt $M = M(\omega)$ sådant att

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \max_{k=1,...,2^n} \frac{|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}|}{2^{-n\alpha}} \leq M < \infty. \tag{4.1}$$

Man kan nu genom utnyttjande av detta visa att X är Hölderkontinuerlig med exponent α på D. Antag nu att $s,t \in D = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ med $s < t$. Låt $r \in \mathbb{N}$ vara det minsta positiva heltalet sådant att $t - s > 2^{-r}$. Då gäller $2^{-r} < t - s \leq 2^{1-r}$ och det existerar $u := \frac{k}{2^r} \in D_r$ och koefficienter $b_1,b_2,...,b_m,b'_1,b'_2,...,b'_m \in \{0,1\}$ sådana att

$$\begin{aligned} s &= u - b'_1 \cdot 2^{-r-1} - b'_2 \cdot 2^{-r-2} - ... - b'_m \cdot 2^{-r-m}, \\ t &= u + b_1 \cdot 2^{-r-1} + b_2 \cdot 2^{-r-2} + ... + b_m \cdot 2^{-r-m}. \end{aligned}$$

Detta gäller, ty eftersom $t - s > 2^{-r}$ existerar det $u \in D_r$ sådant att $u > s$ och $u < t$. Ovanstående likheter fås genom att vidare betrakta tillräckligt täta gitter ty $s,t \in D$. Låt vidare

$$\begin{aligned} s_l &:= u - \sum_{j=1}^{l} b'_j \cdot 2^{-r-j}, \text{ och} \\ t_l &:= u + \sum_{j=1}^{l} b_j \cdot 2^{-r-j} \text{ för } l = 0,1,2,...,m. \end{aligned}$$

Man kan nu uppskatta $|X_t - X_s|$ med hjälp av triangelolikheten enligt

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &= |X_{t_m} - X_{s_m}| \\ &= |\underbrace{X_{t_0}}_{=u} + (X_{t_1} - X_{t_0}) + ... + (X_{t_m} - X_{t_{m-1}}) \\ &\quad - \underbrace{X_{s_0}}_{=u} - (X_{s_1} - X_{s_0}) - ... - (X_{s_m} - X_{s_{m-1}})| \\ &\leq \underbrace{|X_{t_0} - X_{s_0}|}_{=0} + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{|X_{t_j} - X_{t_{j-1}}|}_{\leq M\cdot(2^{-r-j})^\alpha \text{ enl.}(4.1)} + \sum_{j=1}^{m} \underbrace{|X_{s_j} - X_{s_{j-1}}|}_{\leq M\cdot(2^{-r-j})^\alpha \text{ enl.}(4.1)} \\ &\leq 2M \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(r+j)\alpha} = 2M \cdot 2^{-(r+1)\alpha} \frac{1}{1 - 2^{-\alpha}} \qquad \text{(geometrisk serie)} \\ &= \frac{2M}{2^\alpha - 1} 2^{-r\alpha} \leq \underbrace{\frac{2M}{2^\alpha - 1}}_{:=M'<\infty} (t - s)^\alpha. \end{aligned}$$

Av detta följer att det existerar ett n.s. ändligt M' sådant att

$$\frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} \leq M' \text{ för alla } s,t \in D = \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n.$$

Med andra ord är X n.s. Hölderkontinuerlig med exponent α på dyadiska tal.

Vi kan nu gå över och bevisa satsens påstående. Eftersom de dyadiska talen ligger tätt, det vill säga $\overline{D} = [0,1]$, existerar en Hölderkontinuerlig utvidgning $\tilde{X} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\tilde{X}_t := \lim_{n\to\infty} X_{t_n}$ med $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vilken som helst följd i D sådan att $t_n \to t$ då $n \to \infty$ [1]. Vi visar nu ännu att $\tilde{X}$ de facto är en version av X: Låt oss uppskatta $\mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|^p] (\geq 0)$. Fatous lemma, [3, Theorem 9.1(e)], ger nu för vilket som helst $t \in [0,1]$ att

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|^p] &= \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} |X_t - X_{t_n}|^p], \text{ ty } |\cdot|^p \text{ kontinuerlig} \\
&= \mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} |X_t - X_{t_n}|^p] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_t - X_{t_n}|^p] \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} C|t-t_n|^\beta = \lim_{n\to\infty} C|t-t_n|^\beta = 0.
\end{aligned}$$

Med andra ord fås nu att $|X_t - \tilde{X}_t|^p = 0$ n.s. Detta medför att $\mathbb{P}[X_t = \tilde{X}_t] = 1$ för varje $t \in [0,1]$, det vill säga $\tilde{X}$ är en version av X. □

Anmärkning 4.7. Vid fallet att villkor (4.1) inte gäller kan man sätta $\tilde{X}_t = 0$ för varje $t \in [0,1]$. Detta sker dock med sannolikhet noll.

Med hjälp av föregående proposition och lemma kan man nu enkelt påvisa kontinuitetsegenskapen hos brownsk rörelse, och den andra konstruktionen är klar.

Proposition 4.8. *Låt $(B_t)_{t\in[0,1]}$ vara en standard pre-brownsk rörelse. Då existerar en slumpfunktion $\tilde{B} \in C([0,1],\mathbb{R})$, som är en version av B, sådan att $(\tilde{B}_t)_{t\in[0,1]}$ är Hölderkontinuerlig med exponent α för vilket som helst $\alpha < \frac{1}{2}$.*

Bevis. Enligt Lemma 4.1 kan Sats 4.6 tillämpas med $p = 2n, n \geq 1$ och $\beta = \frac{p}{2} = n$. Av detta följer Hölderkontinuitet med exponent $\alpha < \frac{\beta-1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$. Genom att vidare låta $n \to \infty$ fås propositionens påstående. □

[1] Man kan även studera funktioner $X^{(n)}$ som är styckevis linjära mellan D_n och observera att $\tilde{X}$ är deras gränsvärde med avseende på funktionernas supremumnorm. I synnerhet är alltså $\tilde{X}$ inte bara en process utan även en slumpfunktion.

Vi har nu konstruerat brownsk rörelse på två olika sätt: via brownska bron och via Kolmogorov-Tjentsov-satsen. Mellan dessa två olika konstruktioner finns en väsentlig skillnad: brownska bron utgick explicit från brownska rörelsens fördelning medan Kolmogorov-Tjentsov är ett mycket mer allmänt resultat. Kolmogorov-Tjentsov ger att alla stokastiska processer som satisfierar kravet på tilläggens moment har en kontinuerlig version. Kolmogorov-Tjentsov gäller exempelvis även för slumpfunktioner i planet.

Kapitel 5

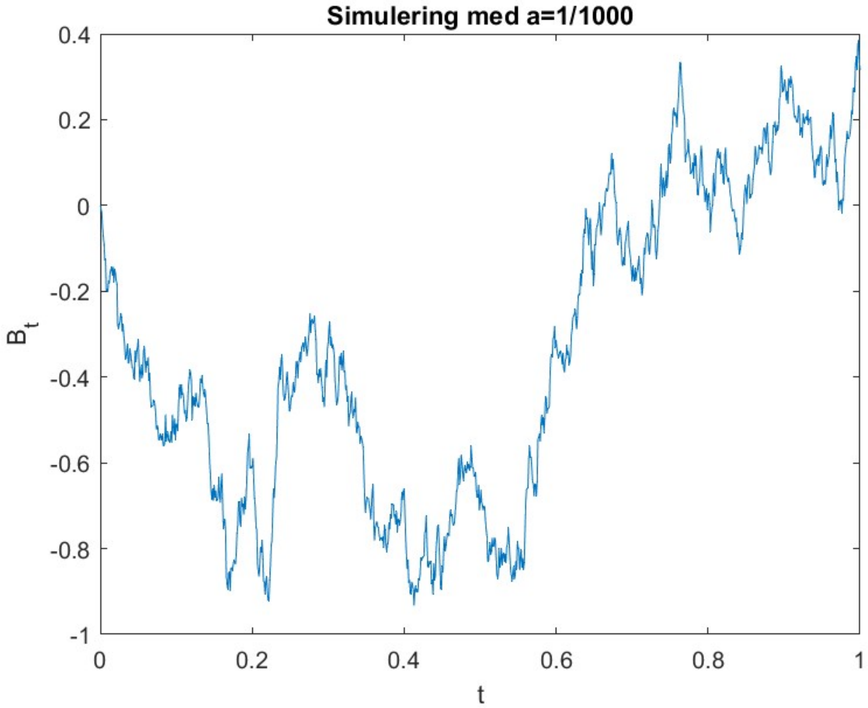
Donskers teorem

Nästa och samtidigt den sista konstruktionen av brownsk rörelse sker med hjälp av Donskers teorem, Sats 5.17. Detta sker genom att först betrakta en enkel slumpvandring: Låt $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ vara en samling av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ och $\mathbb{E}[\xi_i^4] < \infty$ för varje $i \in \mathbb{N}$. Dessa utgör rumsstegen i slumpvandringen. Låt summan av de k första stegen betecknas med $S = (S_k)_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, det vill säga $S_k = \sum_{l=1}^{k} \xi_l$, och sätt $S_0 = 0$. Vi vill nu vidare definiera denna summa för alla tider $t \in \mathbb{R}$: detta görs genom att interpolera linjärt mellan värdena slumpvandringen tar vid tidsstegen. Då fås $S_t = S_{\lfloor t\rfloor} + (t - \lfloor t\rfloor)\xi_{\lfloor t\rfloor+1}$ för $t \in \mathbb{R}$. Fixera vidare en (liten) skalparameter, $a > 0$, och definiera den skalade slumpvandringen $X^{(a)} = (X_t^{(a)})_{t\in[0,1]}$, med rumssteg av storlek $\sqrt{a}$ och tidssteg av storlek a, enligt

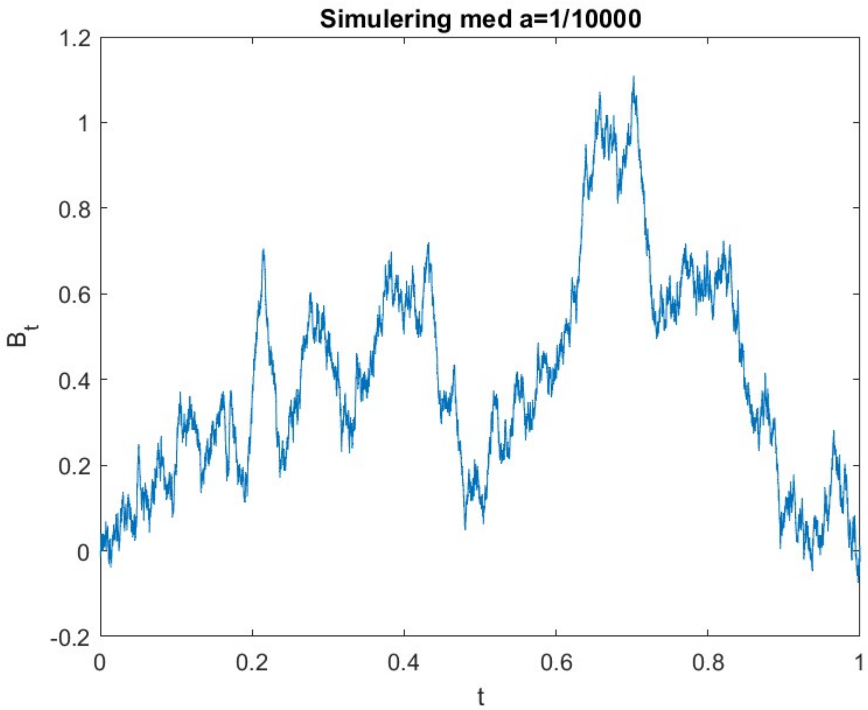
$$X_t^{(a)} = \sqrt{a}S_{t/a} = \sqrt{a}\left(\sum_{l=1}^{\lfloor t/a\rfloor} \xi_l + \left(\frac{t}{a} - \left\lfloor \frac{t}{a}\right\rfloor\right)\xi_{\lfloor t/a\rfloor+1}\right). \tag{5.1}$$

Några simuleringar av ovanstående slumpvandring har gjorts nedan med $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$. Notera här att några specialfall av slumpvandringen ovan redan behandlats i avhandlingen: i de Moivre-Laplace-teoremet, Sats 2.7, var ξ_i väsentligen $Bernoulli(p)$-fördelade, och i brownska brons konstruktion (Lemma 3.13) var ξ_i gaussiska. Målet i detta kapitel är att visa att den skalade slumpvandringen ovan konvergerar svagt till standard brownsk rörelse[1] då $a \downarrow 0$ på rummet

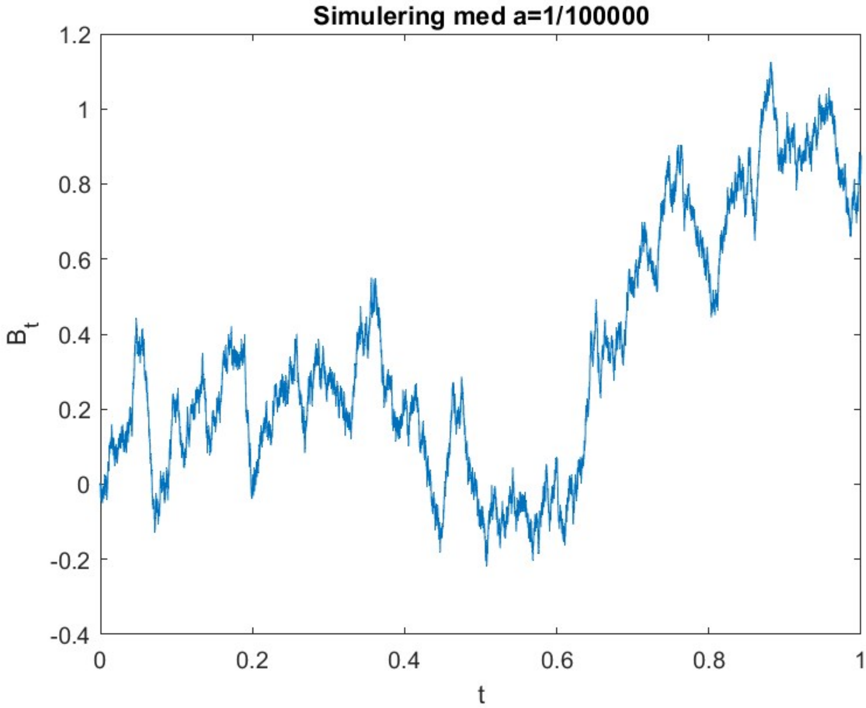
[1]Om $Var(\xi_i) = 1$ får man standard brownsk rörelse medan man annars får $\sqrt{\mathbb{E}[\xi_i^2]}\times$ standard brownsk rörelse. I fortsättningen talar vi dock enbart om standard brownsk rörelse i och med att standard brownsk rörelse alltid kan åstadkommas via skalning.



Figur 5.1: Simulering av $X_t^{(a)}$ med $a = 1/1000$.



Figur 5.2: Simulering av $X_t^{(a)}$ med $a = 1/10000$.



Figur 5.3: Simulering av $X_t^{(a)}$ med $a = 1/100000$.

$C([0,1],\mathbb{R})$. Detta kallas Donskers teorem. Om detta lyckas har vi således konstruerat standard brownsk rörelse på ännu ett sätt.

5.1 Grundbegrepp

Låt oss först börja med några viktiga definitioner som vi behöver:

Definition 5.1. En samling sannolikhetsmått $(\nu_i)_{i\in I}$ på ett metriskt rum X är *stram* om det för varje $\epsilon > 0$ existerar någon kompakt delmängd $K \subset X$ sådan att $\nu_i[K] > 1 - \epsilon$ för varje $i \in I$.

Definition 5.2. *Metrisering av svag konvergens.* Svag konvergens säger vilka följder av Borel sannolikhetsmått på ett metriskt rum X som konvergerar. Det visar sig att om X är separabelt, så induceras svag konvergens av en metrik, vilket är fallet för rummet $C([0,1],\mathbb{R})$. En metrik som ger upphov till svag konvergens är exempelvis den så kallade Lévy-Prohorov metriken.

Definition 5.3. En samling sannolikhetsmått $(\nu_i)_{i\in I}$ på ett metriskt rum X är *prekompakt* (i meningen av svag konvergens) om varje följd $(\nu_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ av sannolikhetsmått från samlingen har en svagt konvergerande delföljd.

En vanlig strategi för att visa svag konvergens är genom nedanstående lemma, det vill säga att visa prekompakthet hos följden som betraktas samt att unikt identifiera vilket som helst delföljdsgränsvärde. Vi kommer även att använda oss av denna strategi vid beviset av Donskers teorem.

Lemma 5.4. *(Prekompakthet och identifikation) Låt (X,d) vara ett metriskt rum. Antag att $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är en följd i X som satisfierar följande två villkor:*
1) Vilken som helst delföljd $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ har en vidare konvergent delföljd $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, det vill säga $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är prekompakt.
2) Om någon delföljd $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergerar i X, så är gränsvärdet något känt $x^* \in X$.
Då gäller att följden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är konvergent i X med gränsvärdet x^*, det vill säga $x_n \to x^*$ då $n \to \infty$.

Bevis. Vi bevisar påståendet indirekt: Antag att $x_n \not\to x^*$ då $n \to \infty$, det vill säga att det för något $\epsilon > 0$ existerar en oändlig delföljd $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ med

$$d(x_{n_k},x^*) > \epsilon \qquad \text{för varje } k \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Av villkor 1) följer att $x_{n_{k_j}} \to x^{**}$ då $j \to \infty$ för något $x^{**} \in X$. Vidare följer av villkor 2) att $x^{**} = x^*$, vilket motsäger (5.2). Därmed är påståendet bevisat. □

Genom följande sats visar det sig att stramhet och prekompakthet på metriska rum är nära kopplade: stramhet hos en samling sannolikhetsmått implicerar även prekompakthet hos samlingen. Omvänt kan man ännu visa att stramhet och prekompakthet på fullständiga, separabla metriska rum, som exempelvis i fallet $C([0,1],\mathbb{R})$, är ekvivalenta. I vårt fall nöjer vi oss med den direkta implikationen, vilket är vad som behövs för att bevisa Donskers teorem.

Sats 5.5. *(Prohorovs sats: den väsentliga riktningen) Om en samling $(\nu_i)_{i\in I}$ av sannolikhetsmått på ett metriskt rum X är stram, så är den prekompakt.*

Bevis. [5, Theorem VII.3] □

Anmärkning 5.6. Ett klassiskt, kort bevis för Prohorovs sats kommer från funktionalanalys: Antag först att måtten $(\nu_i)_{i\in I}$ är alla stödda på en kompakt mängd $K \subset X$. Enligt Riesz-Markov-Kakutani-teoremet sammanfaller dualelementen ϕ av $C(K \to \mathbb{R})$, med $\phi(1) = 1$, med Borelsannolikhetsmått på K. Enligt Banach-Alaoglu-teoremet är denna samling av dualelement/mått kompakt i meningen av svag konvergens (som kallas svag* inom funktionalanalys). Ett längre, mer elementärt och måtteoretiskt bevis finns i [5].

Med hjälp av de två föregående hjälpresultaten återstår nu följande för att bevisa Donskers sats:

1. Visa att lagarna för processerna $X^{(a)}$, för olika $a > 0$, bildar en stram samling. Därmed ger Prohorovs sats prekompaktheten hos samlingen, det vill säga att vilken som helst följd $X^{(a_m)}$, med $a_m \downarrow 0$, har konvergenta delföljder.

2. Unikt identifiera vilket som helst delföljdsgränsvärde av processen $X^{(a)}$ som standard brownsk rörelse.

Utmaningen visar sig vara att bevisa den första av punkterna ovan. Till detta behövs en handfull hjälpresultat som vi i tur och ordning presenterar i en kedja av lemmor för att slutligen lyckas bevisa den avgörande propositionen, Proposition 5.16. Denna säger att samlingen av lagarna av $X^{(a_n)}$ är stram på $C([0,1],\mathbb{R})$. Denna, i kombination med Prohorovs sats (Sats 5.5), ger oss den första punkten ovan. Den andra punkten följer tämligen naturligt av den centrala gränsvärdessatsen, [3, Theorem 21.1], och vid fallet att stegen följer en Rademacherfördelning följer identifikationen direkt från Proposition 2.13.

5.2 Strama måttsamlingar på $C([0,1],\mathbb{R})$

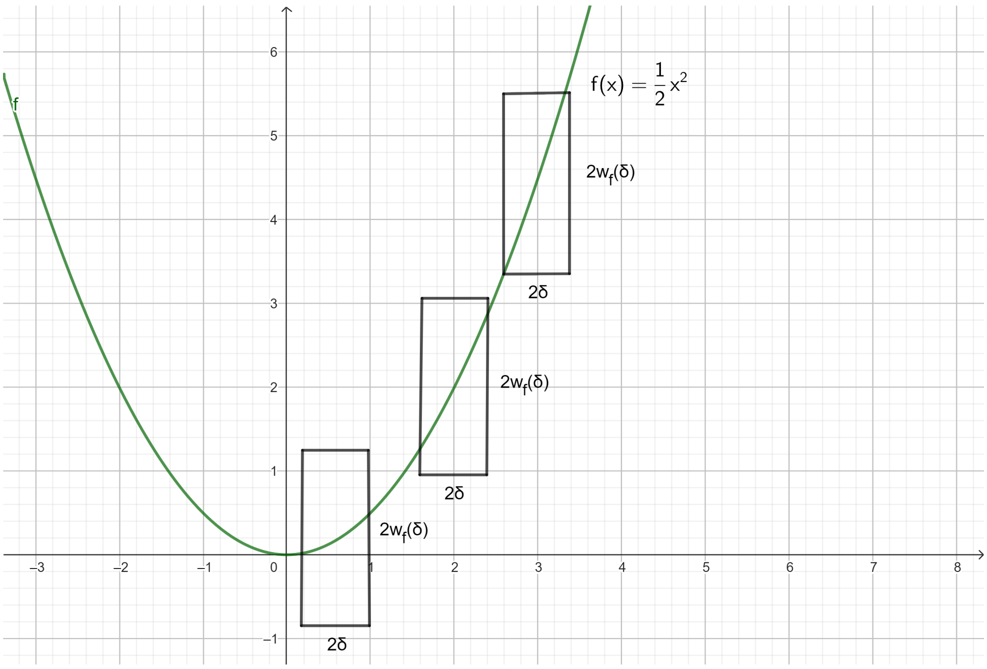
Låt oss fortsätta med ännu några nödvändiga definitioner.

Definition 5.7. *Kontinuitetsmodulen*, $\mathbf{w}_f$, för en funktion, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definieras för $\delta > 0$ enligt $\mathbf{w}_f(\delta) = \sup_{t,s\in[0,1],|s-t|\leq\delta} |f(s) - f(t)|$.

Anmärkning 5.8.

1. $\mathbf{w}_f$ existerar ty f likformigt kontinuerlig och $\mathbf{w}_f(\delta)$ är växande i δ, samt $\mathbf{w}_f(\delta) \to 0$ då $\delta \downarrow 0$.

2. För fast δ gäller att $f \mapsto \mathbf{w}_f(\delta)$ är kontinuerlig ($C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$), det vill säga $\mathbf{w}_f(\delta)$ är slumpvariabler.



Figur 5.4: Kontinuitetsmodulen illustrerad på intervallet [0,3] för $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ med $\delta = 0{,}4$.

Exempel 5.9. f är likformigt kontinuerlig om och endast om $\mathbf{w}_f(\delta) = o(1)$, det vill säga om $\lim_{\delta\downarrow 0} \mathbf{w}_f(\delta) = 0$.

I Figur 5.4 har kontinuitetsmodulen illustrerats med en exempelfunktion. Kontinuitetsmodulen har illustrerats med lådor av dimension $2\delta \times 2\mathbf{w}_f(\delta)$, och med mittpunkt på funktionskurvan. Då överskrider kurvan aldrig de vågräta kanterna på lådorna.

Definition 5.10. En familj av funktioner, $\Phi \subset C([0{,}1],\mathbb{R})$, är *likformigt ekvikontinuerlig* om $\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{f\in\Phi} \mathbf{w}_f(\delta) = 0$.

Härnäst fortsätter vi med ett nyttigt hjälpresultat, nämligen Arzelá-Ascoli satsen. För våra ändamål är följande ekvivalenta version behändig att använda.

Sats 5.11. *(Arzelá-Ascoli) En delmängd, $\Phi \subset C([0{,}1],\mathbb{R})$, är prekompakt om och endast om följande två villkor gäller:*

$$\sup_{f\in\Phi} |f(0)| < \infty. \tag{5.3}$$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{f\in\Phi} \mathbf{w}_f(\delta) = 0. \tag{5.4}$$

Bevis. [5, Theorem H.15], alternativt [8, Theorem 5.19]. □

Låt oss fortsätta med en mycket viktig proposition som används framöver för att verifiera stramhet i rummet av kontinuerliga funktioner. Beviset av denna bygger starkt på Arzelá-Ascoli satsen.

Proposition 5.12. *En följd $(\nu_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ av sannolikhetsmått på $C([0,1],\mathbb{R})$ är stram om och endast om följande två villkor gäller:*
i) (Begränsade initialvärden)

$$\begin{aligned}&\text{För varje } \epsilon > 0 \text{ existerar ett } M < \infty \text{ och } n_0 \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ sådana att}\\ &n \geq n_0 \Rightarrow \nu_n[\{f \mid |f(0)| \geq M\}] \leq \epsilon.\end{aligned} \tag{5.5}$$

ii) (Begränsade kontinuitetsmoduler)

$$\begin{aligned}&\text{För varje } \epsilon,\eta > 0 \text{ existerar ett } \delta > 0 \text{ och } n_0 \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ sådana att}\\ &n \geq n_0 \Rightarrow \nu_n[\{f \mid \mathbf{w}_f(\delta) \geq \eta\}] \leq \epsilon.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Bevis. "$\Rightarrow$": Antag att $(\nu_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ är stram och fixera $\epsilon > 0$. Välj nu en kompakt delmängd $\Phi \subset C([0,1],\mathbb{R})$ sådan att $\nu_n[\Phi] \geq 1-\epsilon$ för varje $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Eftersom Φ är kompakt är den även prekompakt och då fås enligt Sats 5.11 att
$\Phi \subset \{f \mid |f(0)| < M\}$ för tillräckligt stort $M > 0$. Då fås

$$1-\epsilon \leq \nu_n[\Phi] \leq \nu_n[\{f \mid |f(0)| < M\}] \Leftrightarrow \nu_n[\{f \mid |f(0)| \geq M\}] \leq \epsilon.$$

Med andra ord gäller (5.5).

Fixera nu även $\eta > 0$. Återigen enligt Sats 5.11 fås för tillräckligt litet $\delta > 0$ att $\Phi \subset \{f \mid \mathbf{w}_f(\delta) < \eta\}$. Av detta följer enligt samma resonemang som ovan att även (5.6) gäller.

"$\Leftarrow$": Antag att (5.5) och (5.6) gäller. Notera att man i båda fallen kan välja $n_0 = 1$ genom att öka $M < \infty$ och minska $\delta > 0$, om nödvändigt. Fixera nu $\epsilon > 0$ och välj M så att delmängden $\Psi_0 := \{f \mid |f(0)| \geq M\}$ satisfierar $\nu_n[\Psi_0] \leq \frac{\epsilon}{2}$ för varje n. Detta kan göras eftersom (5.5) gäller. Vidare gäller att det för varje $k \in \mathbb{N}$ existerar ett $\delta_k > 0$ sådant att $\Psi_k := \{f \mid \mathbf{w}_f(\delta_k) \geq \frac{1}{k}\}$ satisfierar $\nu_n[\Psi_k] \leq \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$ för varje n. Detta kan göras ty (5.6) gäller. Låt nu $\Phi := \Psi_0^c \cap (\cap_{k\in\mathbb{N}} {\Psi_k}^c)$. Då gäller att Φ satisfierar (5.3), (5.4) och därmed enligt Sats 5.11 att Φ är prekompakt, och därav är dess slutna hölje, $\overline{\Phi}$, kompakt. Nu fås genom utnyttjande av ovanstående att

$$\begin{aligned}
\nu_n[\overline{\Phi}] \geq \nu_n[\Phi] &= 1 - \nu_n[\Phi^c] \\
&= 1 - \nu_n\left[\Psi_0 \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Psi_k\right)\right], \text{ enligt de Morgan} \\
&\geq 1 - \nu_n[\Psi_0] - \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n[\Psi_k], \text{ enligt subadditiviteten hos } \nu_n \\
&\geq 1 - \frac{\epsilon}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} \qquad \text{(geometrisk summa)} \\
&= 1 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = 1 - \epsilon.
\end{aligned}$$

Detta gäller för varje n så $(\nu_n)_{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ är stram. □

Vi fortsätter med en övre gräns för kontinuitetsmodulen som används vid beviset av nästföljande lemma, Lemma 5.14.

Lemma 5.13. *Antag att* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$ *är sådana att* $\min_{1\leq j\leq k}(t_j - t_{j-1}) \geq \delta$. *Då gäller för varje* $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ *att* $\mathbf{w}_f(\delta) \leq 3\max_{1\leq j\leq k}\sup_{s\in[t_{j-1},t_j]}|f(s) - f(t_{j-1})|$.

Bevis. Låt oss beteckna $M := \max_{1\leq j\leq k}\sup_{s\in[t_{j-1},t_j]}|f(s) - f(t_{j-1})|$. Antag nu att $s,t \in [0,1]$ med $|s - t| \leq \delta$, så att både s och t behöver behandlas i definitionen av kontinuitetsmodulen. Man kan vidare utan inskränkning anta att $s < t$. Eftersom $\min_{1\leq j\leq k}(t_j - t_{j-1}) \geq \delta$ fås två fall: antingen gäller att $s,t \in [t_{j-1},t_j]$ för något j eller så gäller att $s \in [t_{j-1},t_j]$ och $t \in [t_j,t_{j+1}]$ för något j.

Om $s,t \in [t_{j-1},t_j]$, så fås enligt triangelolikheten att

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(t)| &= |f(s) - f(t_{j-1}) + f(t_{j-1}) - f(t)| \\
&\leq |f(s) - f(t_{j-1})| + |f(t_{j-1}) - f(t)| \\
&\leq M + M = 2M, \text{ enligt definitionen av } M.
\end{aligned}$$

Om å andra sidan $s \in [t_{j-1},t_j]$ och $t \in [t_j,t_{j+1}]$, så fås återigen genom tillämpning av triangelolikheten att

$$\begin{aligned}
|f(s) - f(t)| &= |f(s) - f(t_{j-1}) + f(t_{j-1}) - f(t_j) + f(t_j) - f(t)| \\
&\leq |f(s) - f(t_{j-1})| + |f(t_{j-1}) - f(t_j)| + |f(t_j) - f(t)| \\
&\leq M + M + M = 3M, \text{ enligt definitionen av } M.
\end{aligned}$$

I båda fallen gäller alltså att $|f(s)-f(t)| \leq 3M$ och därmed att $\mathbf{w}_f(\delta) \leq 3M$, ty s och t var godtyckligt valda. □

Låt oss fortsätta med ännu ett viktigt lemma som ger ett tillräckligt villkor för att framöver kunna verifiera stramhet hos lagarna av $X^{(a_n)}$.

Lemma 5.14. *Låt $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ vara en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Låt även $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vara en följd av tidssteg $a_n > 0$, sådan att $a_n \downarrow 0$ då $n \to \infty$. Antag att*

$$\lambda^2 \limsup_{h\to\infty} \mathbb{P}[\max_{1\leq l'\leq h} |\sum_{l=1}^{l'} \xi_l| \geq \lambda\sqrt{h}] \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0. \tag{5.7}$$

Då gäller att lagarna av $X^{(a_n)}$, för $n \in \mathbb{N}$, definierade enligt (5.1) *bildar en stram samling i $C([0,1],\mathbb{R})$.*

Bevis. Låt oss bevisa stramheten via Proposition 5.12:

Villkor (5.5) gäller trivialt för lagarna av $(X^{(a_n)})_{n\in\mathbb{N}}$, ty $X_0^{(a_n)} = 0$ för varje $n \in \mathbb{N}$.

Det återstår att visa att villkor (5.6) gäller. Välj nu $\eta > 0$ godtyckligt, vi vill visa att

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta] = 0.$$

Fixera även ett litet $\delta > 0$; vi antar i synnerhet att $\delta \leq 1$. Dela nu in intervallet $[0,1]$ med hjälp av punkter $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k \geq 1$, sådana att $t_j - t_{j-1} \geq \delta$ för varje $1 \leq j \leq k$. Lemma 5.13 kan nu tillämpas och det ger att

$$\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \leq 3 \sup_{s\in[t_{j-1},t_j]} |X_s^{(a_n)} - X_{t_{j-1}}^{(a_n)}| \text{ för något } 1 \leq j \leq k.$$

Härav fås följande övre gräns för $\mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\in[t_{j-1},t_j]} |X_s^{(a_n)} - X_{t_{j-1}}^{(a_n)}| \geq \frac{\eta}{3} \text{ för något } j \in \{1,...,k\}\right] \\
&= \mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^{k} \sup_{s\in[t_{j-1},t_j]} |X_s^{(a_n)} - X_{t_{j-1}}^{(a_n)}| \geq \frac{\eta}{3}\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\left[\sup_{s\in[t_{j-1},t_j]} |X_s^{(a_n)} - X_{t_{j-1}}^{(a_n)}| \geq \frac{\eta}{3}\right].
\end{aligned}$$

Låt oss vidare för det givna δ och $n \in \mathbb{N}$ definiera heltalen $h = h_n := \lceil \delta/a_n \rceil$ och $k := \lceil 1/\delta \rceil$. Välj vidare tidpunkter $t_j = jh_na_n$ för $j = 0,1,...,k$. Då gäller att $t_j - t_{j-1} = h_na_n > \delta$. Notera att $h_n \to \frac{\delta}{a_n}$ då $n \to \infty$, vilket medför att $h_na_n \to \delta$ då $n \to \infty$, och härav att det för tillräckligt stort n gäller att $a_n \leq \frac{2\delta}{h_n}$. Av denna tidsuppdelning följer att funktionen $g(s) := |X_s^{(a_n)} - X_{t_{j-1}}^{(a_n)}|$, $s \in [t_{j-1},t_j]$, antar sitt maximum i någon punkt $s \in a_n\mathbb{Z} \cap [t_{j-1},t_j]$. Härav fås att

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[t_{j-1},t_j]} |X_s^{(a_n)} - X_{t_{j-1}}^{(a_n)}| &= \sup_{s\in[t_{j-1},t_j]} \sqrt{a_n} \left| \sum_{l=1}^{\lfloor s/a_n \rfloor} \xi_l - \sum_{l=1}^{\lfloor t_{j-1}/a_n \rfloor} \xi_l \right| \\
&= \max_{s\in a_n\mathbb{Z}\cap[t_{j-1},t_j]} \sqrt{a_n} \left| \sum_{l=t_{j-1}/a_n+1}^{s/a_n} \xi_l \right| \\
&= \max_{s\in a_n\mathbb{Z}\cap[t_{j-1},t_j]} \sqrt{a_n} \left| \sum_{l=(j-1)h_n+1}^{s/a_n} \xi_l \right| \\
&= \max_{l'\in\mathbb{Z},(j-1)h_n<l'\leq jh_n} \sqrt{a_n} \left| \sum_{l=(j-1)h_n+1}^{l'} \xi_l \right|.
\end{aligned}$$

Nu fås genom att fortsätta från den tidigare övre gränsen för $\mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta]$ att

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta] &\leq \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}\left[\max_{l'\in\mathbb{Z},(j-1)h_n<l'\leq jh_n} \sqrt{a_n} \left| \sum_{l=(j-1)h_n+1}^{l'} \xi_l \right| \geq \frac{\eta}{3} \right] \\
&= k\mathbb{P}\left[\max_{l'\in\mathbb{Z},0<l'\leq h_n} \left| \sum_{l=1}^{l'} \xi_l \right| \geq \frac{\eta}{3\sqrt{a_n}} \right], \text{ ty } (\xi_l)_{l\in\mathbb{N}} \text{ stationär.}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Vi är intresserade av en övre gräns för uttrycket ovan då n är stort. Redan tidigare konstaterades att $a_n \leq \frac{2\delta}{h_n}$ för stort n, och det gäller även att $k \leq \frac{2}{\delta}$, ty $\delta \leq 1$ och $\lceil x \rceil \leq 2x$ då $x \geq 1$. Man kan härmed vidare genom utnyttjande av detta uppskatta (5.8) för att få den övre gränsen

$$\mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta] \leq \frac{2}{\delta}\mathbb{P}\left[\max_{l'\in\mathbb{Z},0\leq l'\leq h_n} \left| \sum_{l=1}^{l'} \xi_l \right| \geq \frac{\eta\sqrt{h_n}}{3\sqrt{2\delta}} \right].$$

Denna gäller för tillräckligt stora n.

Beteckna nu $\lambda = \lambda(\delta) := \frac{\eta}{3\sqrt{2\delta}}$; härmed svarar $\delta \downarrow 0$ mot att $\lambda \uparrow \infty$. Man kan nu omskriva föregående uppskattning enligt

$$\mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta] \leq \frac{36}{\eta^2}\lambda^2 \mathbb{P}\left[\max_{l' \in \mathbb{Z}, 0 \leq l' \leq h_n} \left|\sum_{l=1}^{l'} \xi_l\right| \geq \lambda\sqrt{h_n}\right].$$

Vidare noteras att då $n \to \infty$ gäller att $h_n = h \to \infty$ ty $a_n \downarrow 0$. Härmed fås att

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta] \leq \frac{36}{\eta^2} \underbrace{\lambda^2 \limsup_{h\to\infty} \mathbb{P}\left[\max_{l' \in \mathbb{Z}, 0 \leq l' \leq h_n} \left|\sum_{l=1}^{l'} \xi_l\right| \geq \lambda\sqrt{h}\right]}_{\xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0 \text{ enligt } (5.7)}$$

$$\to 0, \text{ då } \lambda \to +\infty.$$

Eftersom $\delta \leq 1$ var godtyckligt vald gäller

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[\mathbf{w}_{X^{(a_n)}}(\delta) \geq \eta] = 0.$$

Villkor (5.6) är härmed uppfyllt och beviset är klart.

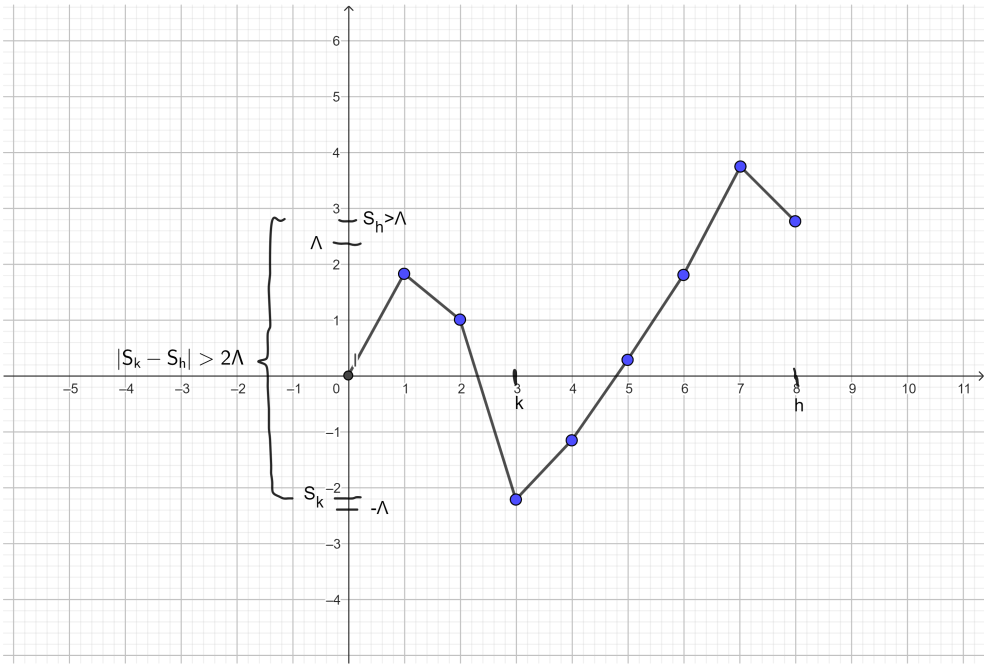
□

5.3 Verifiering av stramhet hos lagarna av $X^{(a_n)}$

Vi fortsätter med ännu ett sista nödvändigt hjälpresultat som behövs vid beviset av Proposition 5.16, nämligen Etemadis olikhet. Lemma 5.14 ger ett kriterium för stramhet med hjälp av slumpvandringens maximivärden över ett givet tidsintervall $t \in [0,h]$. Etemadis olikhet relaterar dessa slumpvariabler till slumpvandringens värde vid den deterministiska tiden $t = h$, en lättare behandlad slumpvariabel.

Lemma 5.15. *(Etemadis olikhet) Antag att $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ är oberoende stokastiska variabler och beteckna $S_k := \sum_{l=1}^{k} \xi_l$. Då gäller för varje $h \in \mathbb{Z}_{>0}$ och $\Lambda > 0$ att $\mathbb{P}[\max_{1\leq k\leq h} |S_k| \geq 3\Lambda] \leq 3 \max_{1\leq k\leq h} \mathbb{P}[|S_k| \geq \Lambda]$.*

Bevis. Beteckna $p := \max_{1\leq k\leq h} \mathbb{P}[|S_k| \geq \Lambda]$. Definiera för $k = 1,2,...,h$ händelsen $A_k := \{|S_k| \geq 3\Lambda, |S_m| < 3\Lambda \text{ för } m = 1,2,...,k-1\}$, det vill säga k är den första tidpunkten då slumpvandringen når höjden 3Λ absolut sett. Definiera även händelsen $B := \{|S_h| \geq \Lambda\}$. Noterbart är att händelserna $(A_k)_{k=1,...,h}$ är disjunkta,



Figur 5.5: Illustration över motivering till
$\{|S_h - S_k| > 2\Lambda\} \subset \{|S_k| > \Lambda \cup |S_h| > \Lambda\}$.

och härmed fås följande estimat:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\max_{1\le k\le h} |S_k| \ge 3\Lambda\right] &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{h} A_k\right] \\
&= \mathbb{P}[(\cup_{k=1}^{h} A_k) \cap B] + \mathbb{P}[(\cup_{k=1}^{h} A_k) \cap B^c] \\
&\le \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[(\cup_{k=1}^{h} A_k) \cap B^c] \\
&= \mathbb{P}[B] + \sum_{k=1}^{h} \mathbb{P}[A_k \cap B^c], \text{ ty } A_k \text{ disjunkta} \\
&\le p + \sum_{k=1}^{h} \mathbb{P}[A_k \cap \{|S_h - S_k| > 2\Lambda\}] \\
&= p + \sum_{k=1}^{h-1} \mathbb{P}[A_k \cap \{|S_h - S_k| > 2\Lambda\}].
\end{aligned}
$$

Vidare gäller att A_k är oberoende av $S_h - S_k$ för varje $k = 1,...,h-1$, därmed fås

$$\mathbb{P}[A_k \cap \{|S_h - S_k| > 2\Lambda\}] = \mathbb{P}[A_k]\mathbb{P}[|S_h - S_k| > 2\Lambda].$$

Notera vidare att $\{|S_h - S_k| > 2\Lambda\} \subset \{|S_k| > \Lambda \cup |S_h| > \Lambda\}$ (se Figur 5.5), varur följer att $\mathbb{P}[|S_h - S_k| > 2\Lambda] \le \mathbb{P}[|S_k| > \Lambda] + \mathbb{P}[|S_h| > \Lambda]$ i enlighet med subadditiviteten hos sannolikhetsmått. Man kan nu vidare uppskatta $\mathbb{P}[A_k]\mathbb{P}[|S_h - S_k| > 2\Lambda]$ enligt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A_k]\mathbb{P}[|S_h - S_k| > 2\Lambda] &\leq \mathbb{P}[A_k](\mathbb{P}[|S_k| > \Lambda] + \mathbb{P}[|S_h| > \Lambda]) \\ &\leq 2p\mathbb{P}[A_k].\end{aligned}$$

Genom sammanslagning av dessa uppskattningar fås nu slutligen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq h} |S_k| \geq 3\Lambda\right] &\leq p + \sum_{k=1}^{h-1} 2p\mathbb{P}[A_k] \\ &= p + 2p \underbrace{\sum_{k=1}^{h-1} \mathbb{P}[A_k]}_{\leq 1,\text{ ty} A_k \text{ disjunkta}} \\ &\leq 3p.\end{aligned}$$

Detta slutför beviset. □

Vi är nu redo att sy ihop de tidigare hjälpresultaten och åstadkomma ett mycket betydelsefullt resultat, nämligen att samlingen av lagarna av $X^{(a_n)}$ är stram på $C([0,1],\mathbb{R})$.

Proposition 5.16. *Anta att $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ är en följd av tidssteg sådan att $a_n \downarrow 0$ då $n \to \infty$. Betrakta den skalade slumpvandringen $X^{(a_n)}$ enligt (5.1) av steg $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$, som är oberoende och likafördelade med $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ och $\mathbb{E}[\xi_i^4] \leq M < \infty$ för varje $i \in \mathbb{N}$. Då gäller att lagarna av $X^{(a_n)}$ bildar en stram samling av sannolikhetsmått på $C([0,1],\mathbb{R})$.*

Bevis. Eftersom följden $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ av steg är oberoende och likafördelad kan Lemma 5.14 tillämpas för att verifiera stramhet. Beteckna $S_k = \sum_{l=1}^{k} \xi_l$. Låt oss börja med att beräkna det fjärde momentet av S_k enligt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_k^4] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=1}^{k} \xi_l\right)^4\right] \\ &= \sum_{l=1}^{k} \mathbb{E}[{\xi_l}^4] + \underbrace{\binom{4}{2}}_{=6} \sum_{1\leq l<m\leq k} \mathbb{E}[{\xi_l}^2]\mathbb{E}[{\xi_m}^2], \text{ ty } \mathbb{E}[\xi_l] = 0 \text{ och } (\xi_l) \text{ IID} \\ &= k\mathbb{E}[\xi_1^4] + 6\binom{k}{2}\mathbb{E}[\xi_1^2]^2 = k\mathbb{E}[\xi_1^4] + 3k(k-1)\mathbb{E}[\xi_1^2]^2.\end{aligned}$$

Till följande noteras att $0 \leq Var(\xi_i^2) = \mathbb{E}[\xi_i^4] - \mathbb{E}[\xi_i^2]^2$, det vill säga $\mathbb{E}[\xi_i^2]^2 \leq \mathbb{E}[\xi_i^4] \leq M$ för varje $i \in \mathbb{N}$. Vi får härmed följande övre gräns för $\mathbb{E}[S_k^4]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_k^4] &= k\mathbb{E}[\xi_1^4] + 3k(k-1)\mathbb{E}[\xi_1^2]^2 \\ &\leq kM + 3k(k-1)M \\ &= 3k^2M - \underbrace{2kM}_{>0} \leq 3k^2M.\end{aligned}$$

Nu fås genom att sätta $\Lambda = \frac{1}{3}\lambda\sqrt{h}$ i Lemma 5.15 att

$$\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq h} |S_k| \geq \lambda\sqrt{h}\right] \leq 3 \max_{1\leq k\leq h} \mathbb{P}\left[|S_k| \geq \frac{1}{3}\lambda\sqrt{h}\right].$$

Nu fås vidare genom utnyttjande av Markovs olikhet, Lemma 2.4, samt den ovan härledda övre gränsen för $\mathbb{E}[S_k^4]$ att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[|S_k| \geq \frac{1}{3}\lambda\sqrt{h}\right] &= \mathbb{P}\left[S_k^4 \geq \left(\frac{1}{3}\lambda\sqrt{h}\right)^4\right] \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[S_k^4]}{\left(\frac{1}{3}\lambda\sqrt{h}\right)^4} \leq \frac{3^5k^2M}{\lambda^4h^2}.\end{aligned}$$

Genom att kombinera de två ovanstående uppskattningarna fås nu att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\max_{1\leq k\leq h} |S_k| \geq \lambda\sqrt{h}\right] &\leq 3 \max_{1\leq k\leq h} \frac{3^5k^2M}{\lambda^4h^2} \\ &= \frac{3^6h^2M}{\lambda^4h^2} = 3^6M\lambda^{-4}.\end{aligned}$$

Notera att övre gränsen ovan är oberoende av h vilket ger följande estimat:

$$\lambda^2 \limsup_{h\to\infty} P\left[\max_{1\leq k\leq h} |S_k| \geq \lambda\sqrt{h}\right] \leq 3^6M\lambda^{-2} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0.$$

Lemma 5.14 ger nu att lagarna av $X^{(a_n)}$, där $n \in \mathbb{N}$, bildar en stram samling på $C([0,1],\mathbb{R})$. $\square$

5.4 Kapitlets huvudresultat: Donskers teorem

Vi är nu redo att bevisa huvudresultatet i detta kapitel, nämligen Donskers teorem. Med hjälp av alla tidigare hjälpresultat och centrala gränsvärdessatsen är detta tämligen rättframt.

Sats 5.17. *(Donsker) Låt $X^{(a)}$, $a > 0$, vara den skalade slumpvandringen given enligt* (5.1) *med oberoende och likafördelade steg $(\xi_l)_{l\in\mathbb{N}}$, sådana att $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ och $\mathbb{E}[\xi_i^4] < \infty$ för varje $i \in \mathbb{N}$. Då gäller att lagarna av $X^{(a)}_{t\in[0,1]}$ konvergerar svagt till standard brownsk rörelse, $B_{t\in[0,1]}$, då $a \downarrow 0$.*

Bevis. Låt oss tillämpa Lemma 5.4:

Av Proposition 5.16 och Prohorovs sats, Sats 5.5, följer att man från vilken som helst följd av tidssteg, $a_n \downarrow 0$, kan extrahera någon delföljd $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sådan att lagarna av $X^{(a_{n_k})}$ konvergerar svagt till ett gränsvärde. Prekompaktheten i Lemma 5.4 är alltså uppfylld.

Låt vidare X^* beteckna en slumpfunktion med en sådan gränsvärdeslag. Det som återstår i Lemma 5.4 är att visa att X^* är en standard brownsk rörelse. För att visa detta beräknas dess ändligdimensionella marginaler; enligt Lemma 3.9 karakteriserar dessa unikt dess lag. För att underlätta beteckningarna betecknas den konvergenta delföljden igen med $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fixera nu $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m \leq 1$, och betrakta gränsvärdet av lagarna av $(X^{(a_n)}_{t_1},...,X^{(a_n)}_{t_m})$ då $n \to \infty$. Notera att man i stället för $X^{(a_n)}$ lika gärna kan betrakta $\tilde{X}^{(a_n)}_t := \sqrt{a_n}\sum_{l=1}^{\lfloor t/a_n\rfloor}\xi_l$, ty $|\tilde{X}^{(a_n)}_{t_j} - X^{(a_n)}_{t_j}| \leq \sqrt{a_n} \to 0$ då $n \to \infty$. Härav följer att de ändligdimensionella marginalerna $(X^{(a_n)}_{t_1},...,X^{(a_n)}_{t_m})$ och $(\tilde{X}^{(a_n)}_{t_1},...,\tilde{X}^{(a_n)}_{t_m})$ går mot samma gränsvärde. Man kan nu skriva tilläggen av processen $\tilde{X}^{(a_n)}$ enligt

$$\tilde{X}^{(a_n)}_{t_j} - \tilde{X}^{(a_n)}_{t_{j-1}} = \sqrt{a_n}\sum_{l=\lfloor\frac{t_{j-1}}{a_n}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t_j}{a_n}\rfloor}\xi_l = \sqrt{a_n}\sum_{l\in\mathbb{Z}\cap\left(\frac{t_{j-1}}{a_n},\frac{t_j}{a_n}\right]}\xi_l.$$

Enligt den centrala gränsvärdessatsen, [3, Theorem 21.1], gäller nu att

$$\frac{\sum_{l\in\mathbb{Z}\cap\left(\frac{t_{j-1}}{a_n},\frac{t_j}{a_n}\right]}\xi_l}{\frac{\sqrt{t_j-t_{j-1}}}{\sqrt{a_n}}} = \sqrt{a_n}\frac{\sum_{l\in\mathbb{Z}\cap\left(\frac{t_{j-1}}{a_n},\frac{t_j}{a_n}\right]}\xi_l}{\sqrt{t_j-t_{j-1}}} \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,1)\cdot Var(\xi_i),$$

$$\text{eller ekvivalent } \sqrt{a_n}\sum_{l\in\mathbb{Z}\cap\left(\frac{t_{j-1}}{a_n},\frac{t_j}{a_n}\right]}\xi_l \xrightarrow{w} \mathcal{N}(0,t_j-t_{j-1})\cdot Var(\xi_i).$$

Vidare gäller att tilläggen $(\tilde{X}^{(a_n)}_{t_1} - \tilde{X}^{(a_n)}_{t_0},...,\tilde{X}^{(a_n)}_{t_m} - \tilde{X}^{(a_n)}_{t_{m-1}})$ är oberoende, ty de innehåller alla olika steg ξ_l, och stegen är oberoende. Härav följer att den sammansatta lagen av tilläggen konvergerar svagt till m oberoende Gaussiska variabler med väntevärden 0 och varianser $t_1-t_0,...,t_m-t_{m-1}$, enligt Lemma 2.12. Detta är den sammansatta lagen av tilläggen av standard brownsk rörelse, det vill säga de ändligdimensionella marginalerna är lika, och därmed har vilket som helst delföljdsgränsvärde X^* de ändligdimensionella marginalerna av standard brownsk rörelse. Den andra delen av Lemma 5.4 är härmed bevisad, och beviset av Donskers teorem är klart. $\square$

Anmärkning 5.18. Man kan även visa att Donskers teorem gäller om stegen endast har ändliga moment av ordning $2 + \epsilon$ för något $\epsilon > 0$, och väntevärde 0. Detta kan exempelvis åstadkommas med hjälp av [7, Korollarium 2]. Detta säger väsentligen att det p:te momentet för summor av n oberoende variabler växer som $n^{\frac{p}{2}}$ då n är stort. Detta kan sedan utnyttjas i Proposition 5.16, modifierad på så vis att $\mathbb{E}[\xi_l^{2+\epsilon}] < \infty$ för varje $l \in \mathbb{N}$, för att få en övre gräns för $\mathbb{E}[S_k^{2+\epsilon}]$ i stället. På så vis erhålles den modifierade versionen av Proposition 5.16 och genom att vidare utnyttja denna fortskrider beviset av Donskers teorem på exakt samma sätt som ovan.

Litteraturförteckning

[1] L. Bachelier. *The Theory of Speculation*. Annales scientifiques de l'É.N.S, 1900.

[2] A. Einstein. *On the Movement of Small Particles Suspended in Stationary Liquids Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat*. Annalen der Physik, 1905.

[3] J. Jacod och P. Protter. *Probability Essentials*. Springer, Andra upplagan, 2004.

[4] I. Karatzas och S.E Shreve. *Brownian Motion and Stochastical Calculus*. Springer, Andra upplagan, 1991.

[5] A. Kemppainen och K. Kytölä. *Large Random Systems*. Kurskompendium, Aalto Math, 2019. Tillgängligt på [`https://math.aalto.fi/~kkytola/files_KK/LRS2019/Large_random_systems-2019.pdf`].

[6] K. Kytölä. *Brownian Motion and Stochastic Analysis*. Föreläsningsanteckningar, Aalto Math. Tillgängligt på [`https://math.aalto.fi/~kkytola/files_KK/lectures_files_KK/Kytola-BMSA_lecture_notes.pdf`].

[7] R. Latala. *Estimation of Moments of Sums of Independent Real Random Variables*. The Annals of Probability, 1997, Vol. 25, No. 3, 1502–1513.

[8] M. Lindström. *Advanced analysis*. Kurskompendium, ÅA Matematik, 2023. Tillgängligt på [`https://stack.abo.fi/moodle/pluginfile.php/26855/mod_resource/content/1/SparaAdvancedAnalysis.pdf`].

[9] H. Robbins. A Remark on Stirling's Formula. *Amer. Math. Monthly,* 62(1):26-29, 1955.

[10] G. Savin. *Hahn-Banach Theorem.* Föreläsningsanteckningar, University of Utah Math Department. Tillgängligt på [`https://www.math.utah.edu/~savin/L5_5210.pdf`].

[11] D. Stenlund. *Sannolikhetslära del 1.* Kurskompendium, ÅA Matematik, 2020. Tillgängligt på [`https://stack.abo.fi/moodle/pluginfile.php/20799/mod_resource/content/9/snl1-2020-forelasningar.pdf`].

[12] D. Stenlund. *Sannolikhetslära del 2.* Kurskompendium, ÅA Matematik, 2020. Tillgängligt på [`https://stack.abo.fi/moodle/pluginfile.php/20922/mod_resource/content/1/2020-snldel2.pdf`].

[13] H. Walker, redaktör. University of York. *De Moivre on the Law of Normal Probability.* Tillgängligt på [`https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/demoivre.pdf`].

[14] D. Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1991.